

ЗНАЧАЈ И ПРИМЕНА АСТРОНОМСКОГ ПОДАТКА У ГЕОДЕЗИЈИ

АЛЕКСАНДАР ЖИВКОВИЋ

*Грађевински факултет, Институт за геодезију,
Булевар револуције 73/1, Београд*

Резиме. Астрономске тачке имају велики значај за геодезију. У раду је кроз 4 аспекта показан и илустрован значај астрономских тачака за геодезију.

Предговор

Упркос огромног значаја који астрономски податак има за геодезију, његово учешће у стварању "Основних геодетских мрежа" имало је доскора маргинални карактер. Зашто је то тако? Један од могућих одговора је тај, да су ови радови веома скупи и да дуго трају. Други је тај да су практичари настојали да што пре дођу до оперативних координата за извршење других многобројних задатака који су се постављали пред геодезију. Када се једанпут дошло до привремених координата методом *развијања мреже*, које су могле да задовоље један део практичних задатака у геодезији, велики део практичара па и они који су били на челу установа које су имале задатак да се старају о *основним геодетским радовима* сматрали су да је задатак у потпуности завршен. Међутим управо овде би требало цитирати Брунсову констатацију из 1878. године када он каже:

*Строго решење почиње тек ту,
где се код досадашњих схватања,
задатак сматра већ извршен.*

Данас се у целом свету а посебно у Европи улажу огромна средства да се дође до што савременијих Основних геодетских мрежа које ће бити у стању да задовоље све захтеве савремене науке и праксе. У Југославији након укидања Савезне геодетске управе 1973. године све активности на плану *основних геодетских радова* практично су замрле.

Циљ овога рада је да подстакне активности за наставак радова на "Основним геодетским мрежама". Посебан значај у овим активностима без сумње припада астрономским радовима, због огромног значаја који астрономски податак има у геодезији. Управо тај значај представља предмет ове студије.

Историјски развој дефиниције тригонометријске мреже 1. реда

Упознајмо се кратко, како је питање тригонометријске мреже 1. реда било третирано од стране Међународне уније за геодезију и геофизику.

На конгресу Уније у Мадриду (1924) била је образована комисија са задатком да у сврху унификације радова појединих држава на Основним мрежама, предложи потребна правила, односно, упутства. Комисија је радила шест година. За време разраде упутства избила су два мишљења: француско, које је заступао Перје и америчко, које је бранио Боуи.

Конгресу у Прагу 1927. године био је предложен француски текст који је израдио Перје, те су на основу тог текста биле прихваћене прве и основне одредбе.

Конгресу у Штокхолму 1930. године била су предложена два текста: француски, састављен од Перјеа и енглески (амерички), састављен од стране Боуиа.

Прихваћене одредбе које се односе на триангулацију 1. реда гласе:

Триангулација 1. реда је триангулација са дугачким странама у којој су сви углови мерени инструментима и методама који дају максималну могућу тачност. Најнепосредније мерило вредности једне триангулације састоји се у грешкама затварања троуглова. Назив триангулације 1. реда може се дати само триангулацијама код којих просечна грешка затварања троуглова не прелази обично једну сексагезималну секунду ($1''$). Код врло малог броја троуглова грешке затварања могу да достигну $3''$.

За мерење углова треба употребити инструменте који су намењени односно конструисани само за мерење хоризонталних углова.

Тежина опажаног правца не треба да буде мања од 20 или 24, узимајући тежину правца опажаног у једном гирусу за јединицу.

Треба напоменути да прихваћене одредбе нису обавезне, него се само препоручују.

Од интереса је навести и дефиницију коју је у свом предлогу дао Боуи:

"Триангулација 1. реда назива се она код које се основице и углови мере са максималном тачношћу и у којој се искориштавају *Лапласове тачке* за отклањање азимуталних отступања. (Тачке на којима се врши астрономско одређивање ширине, дужине и азимута зову се Лапласове тачке).

У новије време постало је познато да тачност триангулације зависи како од броја и распореда основица и тачака Лапласа, тако и од величине грешака у угловима. Главна сврха триангулације 1. реда састоји се у одређивању са највећом тачношћу дужина страна у мрежи и координата тачака. Триангулација са већим бројем Лапласових тачака, али са мањом тачношћу у мерењу углова, може дати географски положај тачака са већом тачношћу него триангулација изведена са високом тачношћу у мерењу углова, али са недовољним бројем основица и Лапласових тачака.

Стране триангулације могу услед тога бити кратке, на пример 10-20 км, а ипак ће тачност резултата бити првокласна, ако постоји довољан број основица и Лапласових тачака а углови су измерени само са задовољавајућом тачношћу".

Битна особина дефиниције Боуна састоји се у потреби одређивања Лапласових тачака. Ова дефиниција у Штокхолму није прихваћена вероватно због тога што постоји много држава чије су триангулације изведене без постављања Лапласових услова.

У 1937. години упутила је Међународна унија државама чланицама упитник са низом питања о извршењу радова на триангулацији I. реда. Између постављених питања било је и ово: "Да ли су код изравнања узимани у обзир услови Лапласа". Позитиван одговор дале су само две државе: Финска и Пољска. (Н. Свечников, Виша геодезија, 1953)

На Скупштини Међународне уније за геодезију и геофизику одржане 1960. године у Хелсинкију, Специјална студијска група бр. 14, у даљем тексту (ССГ) поднела је извештај којим се предлажу спецификације за успостављање Основних геодетских мрежа. У складу са сугестијама ССГ, ове привремене спецификације биле су усвојене од стране Асоцијације да служе као путоказ.

Спецификације за Основне мреже у геометријској геодезији могу се поделити у два дела:

1. Опште спецификације
2. Препоруке стандарда за различите методе мерења.
Упознајмо се ближе са горе поменутим одлукама.

1. Опште спецификације

- 1.1. Геодетске мреже које образују јединствену основу за националне геодетске радове или се успостављају као интернационалне споне које омогућавају научна истраживања на међународној основи у погледу одређивања облика и димензија Земље, дефинишу се као Основне геодетске мреже.
Основна геодетска мрежа требало би да буде успостављена са таквом тачношћу, да у изравнатој мрежи релативна средња грешка стране у апсолутно оријентисаном систему када не прелази $1 : 100\,000 \sqrt{S/30}$, где S означава удаљеност станица у метрима.
- 1.2. Основна мрежа требало би да буде образована на такав начин да се сваки њен део добро контролише кроз геометријске услове.
- 1.3. У случају да се размера мреже одређује помоћу дужинских мерења као што су летве или жице, калибрација мера има да буде изведена на међународном метарском стандарду, ређе помоћу неке стандардне основице која је адекватно стандардизована. У случају да се размера одређује помоћу електрооптичких метода или радарског система, требало би да се користи брзина светлости, усвојена од стране Асоцијације.

2. Препоруке стандарда за различите методе мерења

2.1. Хоризонтална угловна мерења

У циљу да се открије фатални утицај рефракције и смање систематске грешке услед рефракције мерења хоризонталних углова треба извршити под различитим атмосферским условима, и да буду распоређена на најмање три различита дана. Средња грешка правца срачуната по формули Ферера треба да буде мања од $0''.4$. Затварања троуглова већа од $2''.5$ требало би одбацити.

2.2. Мерења основица и основичких мрежа

Мерења основица треба да буду изведена тако, да што је могуће више искључе неповолне изворе систематских грешака. Летве и жице требало би да се калибрирују пре и после мерења основице сходно 1.3. Најмање три различите мере требало би употребити у сваком правцу.

Основичке мреже требало би да дају конфигурацију, која с обзиром на локалне околности коликогод је то могуће искључује опасан систематски утицај.

Препоручује се да се ова мерења планирају тако да дају средњу квадратну грешку излазне стране основичке мреже од $1 : 400\ 000$.

2.3. Дужинска мерења страна

Мерења би требало да буду распоређена бар на два различита дана. Код мерења која замењују основице и основичке мреже средња грешка излазне стране основичке мреже треба да буде мања од $1 : 300\ 000$. Средња грешка произвољно измерене стране у мрежи требало би да буде мања од $1 : 200\ 000$.

Метеоролошка опажања требало би да буду распоређена у току мерења тако да обезбеђују одговарајућу тачност у одређивању рефракционе поправке.

Проверавање фреквенције и инструменталних константи требало би да се изводе тако, да у сваком тренутку могу да задовоље постављене услове тачности.

Трилатерациона мрежа требало би да буде боље ојачана прикладним угловним мерењима на пример, дуж траверзи које повезују Лапласове тачке.

2.4. Астрономска мерења

Астрономска мерења азимута и лонгитуде на Лапласовим тачкама требало би да буду распоређена тако да се што више искључе систематски утицаји. Станице би требало опажати у паровима са симултаним реципрочним одређивањем азимута. Одређивања азимута као и лонгитуде требало би распоредити на бар три различите ноћи. Лонгитуда би требало да се одређује као разлика лонгитуде од лонгитуде референтне станице, где одговарајућа мерења треба да се

врше на такав начин да систематски утицаји буду што боље елиминисани у разлици. Мерења би требало да имају такву тачност, да средња грешка израза:

$$A_L = \alpha - (\lambda - L) \sin B$$

срачунатог из података мерења на станици буде мања од 1".

2.5. Распоред основица (дужински одређених страна) у тригонометријским мрежама

Густина дужински одређених страна у мрежи мора да буде таква да у најслабијем делу мреже тачност дужине стране одговара општој спецификацији датој у 1.1. Пошто ова тачност зависи од много фактора, никакво једноставно правило за одређивање ове густине не може бити дато.

Међутим, јако је пожељна нека једноставна процедура за процену густине. Прва приближна процена може се добити помоћу добро познатог израза за *моћ фигуре* допуњеног с обзиром на тачност дужина одређених страна. Критеријум се може изразити овако

$$100 > R + \frac{50}{n_a^2} + \frac{50}{n_b^2}$$

Овде R означава *моћ фигуре* срачунату између две посматране излазне стране основичке мреже, чије се средње грешке оцењују на 1 : 100 000 n_a и 1 : 100 000 n_b респективно.

2.6. Распоред Лапласових тачака

Тест тачности азимута најслабије стране између две посматране Лапласове тачке може се извести на сличан начин као што је то описано у 2.5. Да би се избегле могуће грешке оријентације у широким деловима мреже, препоручује се аранжирати Лапласове тачке знатно гушће но што је назначено овом методом.

Међутим, може бити дато једно једноставније правило, а које да је дозвољени број азимуталних угловних преноса између две Лапласове тачке као функције тачности мерења дефинисаних у 2.1. и 2.4. Највећи број преносних углова азимута између Лапласових тачака може се ставити у триангулацији 8 - 10, а у раду са траверзама 6 - 8.

2.7. Старе мреже

Старе мреже које су нађене сувише слабим, често се могу ојачати, увођењем накнадних дужинских мерења и Лапласових тачака, тако да обновљена мрежа може да задовољи постављене услове тачности дефинисане општом спецификацијом 1.1. Међутим, неопходно је претходно се уверити да тачке обухваћене таквим накнадним мерењима нису померене, након мерења у првобитној триангулацији услед савременог померања Земљине коре и других узрока.

Уобичајени поступак за оријентацију тригонометријске мреже

Оријентациони поступак

Од произвољног положаја нулте тачке система X, Y, Z зависи које ће ну- меричке вредности координата да прими некакав полиедар, тј. које ће вред- ности да имају његове елипсоидне координате B и L . Астрономске позиције φ и λ међутим су физички (мерењем) једнозначно утврђене. Пошто разлике ас- тронومских и елипсоидних вредности дају одступања вертикала, онда произво- лјно изабрани положај нулте тачке има за последицу, да одступања вертикала имају *релативан карактер*.

Што је веће одступање вертикала у некој тачки, то је јаче нагнута елип- соидна тангентна раван према природној равни хоризонта. Стога утолико више елипсоидни азимут A одступа од астрономског азимута α тј. утолико ће се више пресликана мрежа на елипсоиду извијати и мењати своју оријентацију. Одавде имамо:

- а) да се појам азимуталне *оријентације* односи на тригонометријску мрежу прсликану на елипсоид
- б) да је азимутална оријентација мреже последица положаја елипсоида.

Са одступањем вертикала ξ и η дате су само две од укупно 3 координате елипсоидног средишта. Као трећа координата може да послужи елипсоидна висина једне тачке. Види се дакле да је појам *положаја елипсоида* физички обухваћен као оријентација тригонометријске мреже.

Постоје различити поступци за оријентацију мреже (а стим и за смештај елипсоида).

1. Поступак централне тачке

Код овог поступка се једна произвољно одабрана тачка P_0 проглашава за *централну тачку*, тј. ставља се да су њена одступања вертикала једнака нули. Тада је елипсоидна тангентна раван паралелна са природним хоризонтом и $A_0 = \alpha_0$ односно $B_0 = \varphi_0$, $L_0 = \lambda_0$. Стога у централној тачки морају да буду изведена астрономска опажања. За решење целокупног проблема смештаја треба да је дата и трећа координата E . Овде се претпоставља да је $E_0 = h_0$ односно ставља се да је геоидно одстојање у P_0 једнако нули, тј. $N_0 = 0$.

2. Прикључак на мрежу суседа

Овде се захтева да су у једној тачки, заједничкој са суседном мрежом, вредности одступања вертикала и елипсоидна висина исте за обе мреже. Ове вредности треба да буду онакве какве су оне срачунате у суседној мрежи. Јед- накост одступања вертикала је гарантована, ако се за ову тачку заједничку за обе мреже, тачно поклапају елипсоидне координате B и L и елипсоидни азимут једне стране.

3. Релативна оријентација према принципу минимума одступања вертикала

Одређује се тако, да се израз

$$\Omega_1 = \sum (\xi^2 + \eta^2) = \min$$

односи на један одређени број астрономских тачака.

Вредност N_0 може да се изведе из једног сличног принципа

$$\Omega_2 = \sum N^2 = \min$$

при чему се N односи на један одређени број тачака.

4. Такозвана апсолутна оријентација

Овде се одступања вертикала за једну специјалну тачку рачунају из аномалија теже према формулама Венинг-Мајнеса. Ова метода претпоставља да се средиште елипсоида поклапа са тежиштем Земље. Вредност N за једну тачку мреже такође се одређује из аномалија теже, према познатој формули Стокса.

5. Апсолутна оријентација према проф. Ледерштереру

Одређује се из релације

$$\Omega_3 = \sum (\xi_{gr} - \xi_{ast})^2 + \sum (\eta_{gr} - \eta_{ast})^2 = \min$$

при чему се вредности ξ_{gr} и η_{gr} одређују из аномалија теже, а вредности ξ_{ast} и η_{ast} астрономско-геодетским путем. Прикључак са трећом координатом се остварује кад је испуњен однос

$$\Omega_4 = \sum (N_{gr} - N_{ast})^2 = \min$$

при чему се вредности N_{gr} одређују из аномалија теже Δg према формули Стокса, а N_{ast} путем астрономског нивелмана.

6. Апсолутна оријентација помоћу вештачких сателита Земље

Коришћењем вештачких сателита Земље, применом доплерске методе опажања, односно применом *Глобалног позиционог система*, одређују се геоцентричне просторне координате X, Y, Z станичне тачке у Светском геодетском координатном систему. Ове координате се лако могу превести у елипсоидне координате B, L и E .

Поступак под 1, 2 и 3 даје релативну оријентацију (односно смештај) док се поступак под 4, 5 и 6 сматра апсолутним.

Редукција мерених величина са физичке површи Земље на рачунски елипсоид

Да би могла да се изврши редукција мерених величина са физичке површи Земље на рачунски елипсоид неопходно је познавати одступања вертикала и елипсоидну висину за све тачке у тригонометријској мрежи.

Одређивање одступања вертикала

Ако се постави питање одређивања одступања вертикала ξ и η онда по правилу постоје два различита поступка

а) *Астрономска метода*

Одступања вертикала добијају се упоређењем дефинитивних елипсоидних величина са одговарајућим астрономским вредностима.

То се упоређење обавља по једначинама

$$\xi = \varphi - B$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi$$

$$\eta = (\alpha - A) \operatorname{ctg} \varphi$$

Астрономска одступања вертикала имају релативан карактер, при чему она зависе од димензија референц елипсоида и од координата изабране почетне тачке.

б) *Гравиметријска метода*

Овде се одступања вертикала добијају из аномалија теже Δg према формулама Венинг-Мајнеса. Према доказу који је дао Дџефрејс најпогодније је код ових рачунања да се користе *аномалије слободног ваздуха*. *Топографско-изостатичке аномалије* треба пре свега примењивати тамо, где још увек има мало изведених гравиметријских мерења.

Гравиметријска одступања вертикала имају апсолутни карактер.

в) *Астрономско-гравиметријска метода*

Комбинујући оба поступка проф. Молоденски је добио астрономско-гравиметријска одступања вертикала. Овај нови поступак омогућава употребу сразмерно малог броја гравиметријских мерења, пошто се утицај далеких зона астрономским мерењима аутоматски узима у обзир.

Елипсоидне висине

а) Доплерска метода односно метода Глобалног позиционог система

Коришћењем вештачких сателита Земље, применом Доплерске методе опажања, односно методе *Глобалног позиционог система*, одређују се геоцентричне просторне координате X, Y, Z станичне тачке у Светском геодетском координатном систему. Ове координате са лако могу превести у елипсоидне координате B, L и E .

б) Метода проф. Молоденског

Елипсоидне висинске разлике ΔE према дефиницији проф. Молоденског и проф. Левалоа имају следећи изглед:

$$\Delta E_{1,2} = \sum_1^2 \Delta h - \sum_1^2 (\xi \cos A + \eta \sin A) \Delta S$$

При чему је:

$$\Delta E_{1,2} = E_2 - E_1$$

Δh = резултат нивелања дуж произвољног пута од тачке P_1 до тачке P_2

ξ, η = компоненте *измерених* одступања вертикала на тачкама физичке површи Земље дуж овог пута

A = азимут елемента пута

После проф. Молоденског и проф. Левалоа (потпуно независно) величини $\Delta E_{1,2}$ указује посебну пажњу.

Треба приметити да је једначина Молоденског била први пут дата од стране Хелмерта.

в) Рачунање елипсоидне висине E помоћу геoidног одступања N

Ако је H ортометријска висина једне тачке, а E њена елипсоидна висина, онда разлика $E - H$ даје одступање висине нулте површи (= геoid) од елипсоида. Ово *геoidно одстојање* означавамо са N . Према томе је

$$E = H + N$$

Одређивање вредности E помоћу а) и б) убудуће ћемо звати *директни поступак*, а методом в) називаћемо *индиректни поступак*.

Геоидне висине

Постоји више начина за одређивање геоидних одстојања.

а) Поступак астрономског нивелмана

Између две тачке P_1 и P_2 постоји однос

$$N_2 - N_1 = - \int_1^2 \bar{\Lambda} ds$$

при чему су $\bar{\Lambda}$ компоненте одступања вертикала које се односе на геоид и то у правцу пута од P_1 према P_2 . Оне се добијају из измерених компоненти одступања вертикала Λ на физичкој површи Земље, када се овима дода поправка $\delta\Lambda$ за кривину вертикала

$$\bar{\Lambda} = \Lambda - \delta\Lambda$$

тако да је

$$\Delta N = N_2 - N_1 = - \int_1^2 (\Lambda - \delta\Lambda) ds$$

или са

$$\overline{\Delta N} = - \int_1^2 \Lambda ds$$

биће

$$\Delta N = \overline{\Delta N} + \int_2^1 \delta\Lambda ds = \overline{\Delta N} + \delta N$$

б) Поступак астрономско-гравиметриског нивелмана

Овај поступак од претходног поступка разликује се у томе, што се уместо астрономски добијене вредности користе гравиметријски интерполована астрономска одступања вертикала добијена према поступку Молодењског.

в) Гравиметријска одређивања

Према формули Стокса могу директно да се срачунају вредности N из аномалија теже Δg , ако су оне познате око целе површи Земље. Због њиховог апсолутног карактера разликују се оне од геоидних одстојања срачунатих према поступку а) и б) и називају се геоидне ундулације.

г) *Метода Доплера односно метода Глобалног позиционог система*

Из познате елипсоидне висине E одређене методом Доплера, односно методом *Глобалног позиционог система* и познате ортометријске висине H за исту тачку имамо да је

$$N = E - H$$

Пројекција мреже

Одговарајућим пројекционим поступком измерене величине на физичкој површи Земље *редукују* се на рачунску површ елипсоида. Опажаном правцу од тачке A на тачку B додаје се *Хелмертова* поправка

$$d = d_1 + d_2 + d_3$$

при чему је

$$d_1 = (\eta_A \cos \alpha_{AB} - \xi_A \sin \alpha_{AB}) \operatorname{ctg} \beta_{AB}$$

$$d_2 = \frac{\rho e^2}{2a} \cos^2 \varphi_A \cdot \sin 2\alpha_{AB} \cdot H_B$$

$$d_3 = -\frac{\rho e^2}{12a} \cos^2 \varphi_A \cdot \sin 2\alpha_{AB} \cdot S_{AB}^2$$

Овде је:

d_1 = поправка због косог положаја елипсоидне нормале према природном правцу вертикале,

d_2 = торзиона поправка због висинског положаја опажане тачке B и

d_3 = поправка за прелаз од нормалног пресека на геодетску линију,

a = средњи полупречник Земље,

$$\rho = \frac{180^\circ}{\pi}$$

e^2 = први бројни ексцентрицитет меридијанске елипсе.

Одговарајуће поправке примају Лапласови азимут и одстојање S , при чему за S нарочиту улогу игра поправка од *геоида на елипсоид*. Она износи у првом приближењу

$$d_4 = -\frac{NS}{a}$$

Када се одбаце све ове поправке, добија се такозвана *метода развијања мреже*, према којој су срачунате готово искључиво све досадашње тригонометријске мреже. Понекад се дешава да се мереним величинама односно правцима додају поправке d_2 и d_3 , али не и d_1 . Таквом поправком још увек није остварена *пројекција мреже*, већ само развијање мреже. Занемарени износи улазе тада као систематске грешке, које деформишу целу мрежу.

Значај Лапласових азимута у геодетским мрежама

Веома значајну улогу у геодетским мрежама игра релација

$$\alpha_g = \alpha_a - (\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi_g - (\xi \sin \alpha_a - \eta \cos \alpha_a) \operatorname{ctg} z_g$$

Ова релација позната је под називом *Лапласова једначина*.

Она је изузетно важна при изравнању ланца степенских мерења и државних тригонометријских мрежа.

У својој суштини она изражава зависност између астрономског и геодетског азимута исте стране, те омогућава да се *геодетски азимут добије из астрономског азимута када му се дода тзв. Лапласова поправка*

$$\Delta\alpha_L = -(\lambda_a - \lambda_g) \sin \varphi_g - (\xi \sin \alpha_a - \eta \cos \alpha_a) \operatorname{ctg} z_g$$

Бројну вредност Лапласове поправке одређује углавном први члан.

Геодетски азимут добијен из астрономског по једначини

$$\alpha_g = \alpha_a + \Delta\alpha_L$$

зове се *Лапласов азимут*.

С обзиром на безначајност другог члана Лапласове поправке, сматра се да тачност одређивања Лапласовог азимута зависи од тачности са којом су одређене три величине:

- астрономски азимут
- астрономска дужина и
- геодетска дужина.

Грешка са којом се одређује геодетска дужина је безначајна у упоређењу са грешкама астрономског азимута и астрономске дужине.

Из претходног произлази изузетно важан закључак: да се Лапласови азимуту могу сматрати скоро независним од грешака триангулације. Према томе, ако се *астрономски азимут одређују независно један од другог онда се Лапласови азимут такође одређују независно*. У овоме је њихов значај и на овоме се заснива њихова корисна улога при изравнању тригонометријских мрежа.

Средња грешка са којом се одређују Лапласови азимуту износи $\pm 0''7$.

Значај Лапласових азимута види се из следећег:

- а) Ови азимуту одређени у ланцима степенских мерења или у државним тригонометријским мрежама развијеним у облику ланца, омогућавају да сваки део ланца ограничен странама са овим азимутима *буде оријентисан независно* од оријентисања других делова и са грешком скоро исте величине у целом ланцу односно у целој мрежи
- б) Ови азимуту *ограничавају нагомилавање систематских грешака* чији је утицај нарочито штетан, само на део ланца између страна са овим азимутима

в) Ови азимути омогућавају постављање при изравнању мреже тзв. *азимуталних условних једначина*. Ове једначине не само да пружају одличну контролу извршених угловних мерења него и повећавају тачност свих елемената триангулације (изравнатих углова, дужина страна, координата тачака).

Треба нагласити да сва наведена позитивна својства Лапласових азимута важе под условом да астрономска мерења, која се врше у сврху одређивања како азимута, тако и астрономских координата, заиста имају горе наведену тачност.

Одређивање геоида

Кратак историски развој одређивања геоида

Одређивање геоида помоћу астрономског нивелмана предложено је од стране Хелмерта 1880. године. Прва примена предложене методе реализована је приликом одређивања геоида у Харцу. Детаљан извештај о овом одређивању публиковао је Гале 1914. године.

У 1939. години од стране Нитхамера био је спроведен замашан астрономски нивелман у меридијану св. Готхард. Нешто доцније спроведен је астрономски нивелман дуж паралеле Цирих. Резултате ових одређивања публиковао је Хунцикер 1944. године. Одређивање геоида у централној Европи изведено је 1949. године од стране Волфа и Таниа. Еландер је објавио 1951. године публикацију о геоиду Балтика и Балтичког прстена. Бонфорд је 1971. године срачунао европски *геоид*. Левалоа и Монже допунили су овај геоид верзијом 1975. и 1978. године.

Захваљујући Морицу 1973. године уведена је *колокација* у геодезију. Тиме је омогућено веома актуелно заједничко коришћење хетерогених података за одређивање облика Земље, дакле створена основа за *комбиновани поступак*, код кога је могуће увести астро-геодетске, гравиметријске и сателитске податке.

У 1983. години публикован је "*Геоид у Аустрији*". Геоид је био одређен према класичној методи астрономског нивелмана по Хелмертовом поступку и модерном поступку колокације. Оба поступка била су затим први пут на једном већем подручју систематски међусобно упоређена.

Главне карактеристике радова на одређивању геоида у неким земљама Европе

За одређивање геоида најчешће се користи метода астрономског нивелмана. Ова метода омогућава да се на релативно лак начин дође до облика геоида. Извођење астрономског нивелмана спроводи се по профилима. Према положају профила разликујемо астрономски нивелман дуж меридијана (св. Готхард)

и астрономски нивелман дуж паралеле (Цирих). Међутим код испитивања геоида на једном подручју могу да буду коришћени и профили дуж меридијана и профили дуж паралела комбиновано као што је то случај у Харцу. Понашање геоида може да буде студирано само на основу једног профила у коме су опажане тачке распоређене у низу на више или мање правилним одстојањима (св. Готхард и Цирих) или пак на једној површи где су тачке са опажаним вредностима више мање правилно распоређене преко целог испитиваног подручја (Харц). Ова последња метода омогућава да се исцртају карте за вредности ξ и η и да се према сопственом налажењу постави гушћа или ређа мрежа профила. (У Харцу на пример на растојању од 10' између профила по меридијану). У сваком од ових профила на правилном растојању, рецимо на сваки *минут ширине* у профилима по меридијану, односно на сваки *минут дужине* у профилима по паралели одређује се вредност ΔN . Вредност ΔN одређује се по већ познатој формули

$$\Delta N = N_2 - N_1 = - \int_1^2 \bar{\Lambda} ds = - \int_1^2 (\Lambda - \delta\Lambda) ds = \overline{\Delta N} + \delta N$$

Код радова како у Немачкој тако и у швајцарској рачунање геоидног издизања ΔN изведено је из одступања вертикала Λ на физичкој површи Земље па је затим додавана поправка δN , којом је узиман у обзир утицај кривина вертикалских линија. Ту се у принципу ради о истом проблему који треба решити код редукције нивелмана на ортометриске висине. Тај је проблем тамо познат под именом "узимање у обзир непаралелности нивоских површи". Другим речима поправка δN није ништа друго до ортометријска поправка у геометријском нивелману.

Максимална разлика између геоида рачунаог са закривљеношћу вертикалских линија и без тога износи 0,43 м за меридијански профил св. Готхард. Та је разлика идентична са разликом између ортометриски редуковане и сирове нивелманске висине.

Тачно рачунање интеграла $\int \Lambda ds$ претпоставља познавање вредности Λ тако густо да се може са сигурношћу утврдити функционална зависност вредности Λ од s . Стога морамо за одступања вертикала Λ наћи одговарајућу *континуирану* криву. То се постиже графичким наношењем компонената одступања вертикала ξ и η као ордината и s као апсциса.

Код цртања криве одступања вертикала Λ као функције од s , готово увек налазимо да густина тачака, на којима су одступања вертикала одређена опажанјем, није довољна. Да би се ова крива што сигурније могла исцртати, према идеји Хелмерта, рачунају се *интерполоване* вредности одступања вертикала Λ за међутачке. Искуство је показало да су интерполоване тачке доста поуздане. Међутим треба нагласити да су рачунања врло опсежна и одузимају доста времена.

Задржимо се мало на једном искуству које је стечено на радовима на астрономском нивелману у Швајцарској и то углавном на радовима који су изведени дуж меридијана св. Готхард. Коболд у свом предавању које је одржано

у Минхену, јануара 1956 године указује на то да су вредности одступања вертикала на физичкој површи Земље у великој мери зависна од планинских облика. Највећи износи одступања вертикала појављују се на планинским падинама. У дну долина и на планинским врховима одступања вертикала су мања, али нису нула. Да би се ток одступања вертикала могао што тачније утврдити требало би опажати екстремне вредности на физичкој површи Земље. Стога би станице требало поставити и на падинама а не само на планинским врховима и долинама. С обзиром на практичну изводљивост, такав поступак је у планинама, барем што се тиче астрономских тачака тешко изводљив.

На темељу многобројних опажанја у Швајцарским Алпима може се са довољном сигурношћу утврдити, да се у високим планинама разлике одступања вертикала између суседних тачака могу одредити из међусобних *висинских углова*, са тачношћу која је довољна за астрономске нивелмане. На тај начин можемо заобићи тегобно и никад сасвим поуздано рачунање интерполованих тачака. Може се још и тврдити да се код нових астрономских нивелмана у високим планинама број астрономских станица може смањити према до сада уобичајеном броју, ако се повећа број међутачака које су међусобно спојене само висинским угловима.

Према искуствима у Швајцарској треба да је просечно растојање између две суседне астрономске тачке у равничарском пределу око 5-6 km, у брдовитом пределу та растојања треба да су само 2-4 km, а у планинским пределима и знатно краћа, ако желимо да средња грешка геоидног издизања буде мања од 2-3 cm.

Код одређивања астрономских елемената, тј. ширина у меридијанским профилима и дужинама у профилима по паралели, не смеју средње грешке да прекораче износ од $\pm 0'' 3$, ако се захтева горе наведена тачност за геоидна издизања. Ова тачност је меродавна за избор поступка опажанја.

Астрономски нивелман у меридијану св. Готхард простире се на дужини од 185 km. Број опажаних астрономских тачака износи 54. Просечно растојање између тачака износи 3.5 km. Уз то долази још 57 међутачака са срачунатим интерполованим вредностима одступања вертикала. Дакле у профилу има укупно 110 интервала, па је према томе $\Delta S = 1.68$ km.

Астрономски нивелман по паралели Цирих простире се на дужини од 210 km. Број опажаних астрономских тачака износи 32. Просечно растојање између тачака износи 6.6 km. Уз то долази још 8 међутачака са срачунатим интерполованим вредностима одступања вертикала. Дакле у профилу има укупно 39 интервала, па је према томе $\Delta S = 5.38$ km.

Аустријски геоид из 1983. године представља верзију геоида одређеног из астрогеодетских података. Геоид покрива 4/5 државне територије. За његово одређивање коришћено је 564 астрономских тачака. На свакој тачки одређене су астрономска ширина и дужина. Просечно растојање између астрономских тачака износи 10 km (једна тачка на 100 km²). Геоид је одређен са тачношћу од ± 10 cm.

Астрономски радови Војногеографског института у Бечу на делу територије наших земаља

Астрономска и тригонометријска триангулација коју су геодети Географског института из Беча од 1872-1874. године положили по Балканском полуострву, за израду познате генералне карте Европе у размери 1 : 300 000, имала је велики значај код извођења доцнијих радова на простору који обухвата данашња*) територија Југославије.

Генерална карта Европе у размери 1 : 300 000 публикована је 1876. године. У њу је унесен велики број астрономски, тригонометријски и графички одређених тачака као и висине многих брда одређених барометрисањем.

На територији ондашње Србије било је постављено 15 астрономских тачака и то: Београд, Шабац, Ваљево, Међулужје, Крагујевац, Неготин, Зајечар, Рудник, Копаноник, Кличевац, Јаребица, Вучковица, Каменица, Краљево и Чачак.

Поред горе поменутих тачака на делу наше територије, који је у то време био у саставу Аустроугарске монархије, измерено је око 20 тачака постављених претежно у Хрватској, Словенији, делом такође у Босни, Славонији и Далмацији.

На астрономским тачкама опажана је висина пола (ширина) и азимут. Висине пола су све од реда измерене према поступку Циркум-Меридијанских опажања. Код азимута коришћена је метода Поларе. Средња грешка висине пола износи $\pm 0''72$, а код азимута $\pm 0''78$.

Од стране Војногеографског института у Бечу у 1904. и 1906. години у *меридијану Љубљане* измерено је укупно 102 станице, од којих отприлике 80 лежи на данашњем Југословенском државном подручју. На поменутих тачкама била је астрономски измерена висина пола и у једном делу мреже такође азимут. Средња грешка висине пола износи $\pm 0''5$.

Астрономски радови у Краљевини Србији

На дан 14. децембра 1878. године основано је *Географско одељење Главног генералштаба српске војске*.

Први систематски премер Србије почео је 1879. године. У периоду од 1880. до 1891. године извршен је први топографски премер Краљевине Србије, у размери 1 : 50 000. На основу тога премера, Српски генералштаб издао је специјалну карту Србије у размери 1 : 75 000.

Године 1900. почиње рад на новом и модерном премеру Србије. Почињу опсежни радови на тригонометријској мрежи Србије. Упоредо са извођењем геодетских мерења (хоризонталних и вертикалних углова) вршена су паралелно и астрономска мерења.

У времену од 1900. до 1910. на подручју ондашње Србије извршена су астрономска мерења на 30 тачака, која су требала да послуже првенствено за

*) Чланак је написан 1988. године.

одређивање одступања вертикала. Тачке на којима су астрономска мерења спроведена, биле су равномерно распоређене преко ондашњег подручја Србије. Оне леже како на врховима планина тако и у долинама. Веровало се да се оваквим распоредом може најбоље открити и испитати утицај одступања вертикала. На овим тачкама била су спроведена само опажања за одређивање астрономске ширине и азимута, пошто у то време метода бежичног преношења времена још није била у употреби. Астрономске дужине дакле нису биле одређиване, пошто је метода телеграфа била третирана као сувише скупа.

Одређивање времена, односно изналажење поправке часовника, која је неопходна како за одређивање астрономске ширине тако и за одређивање азимута, спроведено је по методи Цингера. Астрономске ширине изналажене су по методи Пјевцова.

Азимут правца ка суседној тригонометријској тачки добијао се опажањем звезде Поларе (Северњаче). Био је — без уметања Мире — измерен угао између тригонометријске тачке и звезде Поларе у временском тренутку Т. Овај угао је поправљен за азимут поларне звезде у тренутку опажања.

Код ових мерења постигнута је следећа тачност:

- а) Средња грешка одређивања времена износи ± 0.1
- б) Средња грешка одређивања ширина креће се између $\pm 0''1$ и $\pm 0''9$. Она је очигледно зависна од броја опажаних парова звезда
- в) Средња грешка азимута лежи између $\pm 0''5$ и $\pm 0''9$.

Списак астрономских тачака

I тачка Параћинске основице, Ртањ, Миџор, Трем, Јастребац, Стрешер, Петрова Гора, Копаоник, Јанков Камен, Торник, Мали Повлен, Дели Јован, Суморовац, Црни Врх (дуленски), Букуља, Цер, Нишка црква, Зајечарска црква, Тија Бара, Неготинска црква, Златокоп, Хисар (лесковачки), Старачи, Трстеничка црква, Чачанска црква, Озеровац, Авала, Кулич, Подгорица, Осонина.

Астрономски радови у Југославији

После I. Светског рата, Војногеографски институт Краљевине Југославије наставио је са активношћу на астрономским опажањима. Те активности су се одвијале следећим редоследом:

1926. Узето је учешће у Светској кампањи лонгитуда
1927. Извршено је одређивање 9 нових астрономских тачака у ланцу дуж 22. меридијана
1933. Извршено одређивање две Лапласове тачке на крајњим тачкама ланца дуж 45. паралеле
1934. Одређено је 15 Лапласових тачака у тригонометријској мрежи на подручју Македоније и Косовско-Метохијске области

1935. Поновљено је одређивање две Лапласове тачке на крајевима југословенског сектора лука дуж 45. паралеле

1936. Одређено је 9 Лапласових тачака

1938. Одређена је разлика лонгитуда Опсерваторије ВГИ и Универзитетске опсерваторије.

После 2. Светског рата, астрономска мерења у Југославији паралелно су изводили Војногеографски институт ЈНА и Савезна геодетска управа.

У времену од 1954. до 1960. године одређено је 60 Лапласових тачака, а у раздобљу од 1961. до 1973. године, одређено је 86 геоидних тачака (Д. Штембергер).

Војногеографски институт ЈНА одредио је укупно 38 Лапласових тачака. Лапласове тачке су одређене на крајевима излазних страна 19 основичких мрежа.

Савезна геодетска управа одредила је укупно 24 Лапласове тачке. Ако се има у виду да су две тачке два пута одређиване произлази да се у мрежи располаже са укупно 60 Лапласових тачака.

Војногеографски институт је за одређивање Лапласових тачака користио универзални инструмент *Асканија*, а за геоидне тачке *Вилд Т-4*. Савезна геодетска управа је за ове сврхе користила само теодолит *Вилд Т-4*.

Обе институције вршиле су опажања по истим методама и на исти начин. Астрономска ширина је одређивана по Талкотовој методи, астрономска дужина из меридијанских пролаза звезда а астрономски азимут тригонометријске стране из опажања Северњаче. Опажања су распоређена на већи број ноћи и обухватају више серија.

Резултати извршених опажања подвргнути су анализи, при чему је утврђена следећа тачност одређивања:

– за 38 Лапласових тачака на крајевима излазних страна основичких мрежа

$$m_{\varphi} = \pm 0'' 085 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 3)$$

$$m_{\lambda} = \pm 0'' 125 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 3)$$

$$m_{\alpha} = \pm 0'' 240 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 5)$$

просечна разлика обрнутих азимута је $\pm 0'' 65$

– за 24 Лапласове тачке које је одредила Савезна геодетска управа

$$m_{\varphi} = \pm 0'' 071 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 3)$$

$$m_{\lambda} = \pm 0'' 106 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 3)$$

$$m_{\alpha} = \pm 0'' 155 \quad (\text{дозвољено } \pm 0'' 5)$$

просечна разлика обрнутих азимута је $\pm 0'' 78$

(дозвољено $\pm 1''$)

Војногеографски институт је на геоидним тачкама одређивао само два елемента, астрономску ширину и дужицу и то по истим методама као и на Лапласовим тачкама, уз нешто мањи број мерења, али *са готово истом тачношћу*. У времену од 1961. до 1968. године измерена је 71 геоидна тачка.

У режији Савезне геодетске управе одређена је астрономска ширина и дужина на укупно 15 геоидних тачака.

Одређивање геоида у Југославији

Српска академија наука 1952. године издала је публикацију С. Бошковића под насловом "Скретања вертикала у Србији".

На основу нумеричких вредности одступања вертикала у правцу меридијана извучене су интерполовањем на географској карти Србије размере 1 : 1 000 000 линије једнаких одступања вертикала ξ од секунде до секунде и исто тако, на другом примерку исте карте извучене су линије једнаких одступања вертикала η по правцу првога вертикала.

По тим подацима срачунати су многи профили, правцем меридијана и правцем првих вертикала, издизања геоида изнад усвојеног рачунског елипсоида. Њиховом комбинацијом одређене су највероватније линије једнаких вредности издизања геоида изнад усвојеног рачунског елипсоида.

На IV Конгресу геодетских инжењера и геометара Југославије, који је одржан 1968. године у Сарајеву, Савезна геодетска управа, поднела је реферат "Одређивање профила геоида дуж 22. меридијана путем астрономског нивелмана".

Ланац дуж 22. меридијана саставни је део меридијанског лука од Северног леденог мора до Средоземља, који је доцније проширен преко Крита и Каира дуж 30. меридијана кроз целу Африку, од Каира до Кептауна на Рту Добре Наде.

Одређивање профила геоида дуж 22. меридијана препоручено је нашој земљи од стране Међународне уније за геодезију и геофизику на X Генералној скупштини одржаној 1954. године у Риму. На XI Генералној скупштини Међународне уније за геодезију и геофизику одржаној 1957. године у Торонту поновљена је препорука нашој земљи да одреди профил геоида дуж 22. меридијана.

Астрономски нивелман дуж 22. меридијана простире се на дужини од 453 km. Број опажаних астрономских тачака износи 17. Просечно растојање између тачака износи 28.3 km. У профилу има укупно 16 интервала, па је према томе $\Delta S = 28.3$ km. Добијени резултати астрономског нивелмана дају глобалну (грубу) апроксимацију релативног тока геоида на изабраном подручју.

У 1971. години објављен је рад А. Муминагића под насловом "Испитивање реалног геоида у Југославији".

На основу опажачког материјала који је током читавог низа година сакупљан у Савезној геодетској управи и Војногеографском институту, средином шездесетих година овога века у Војногеографском институту у оделењу за Основне радове под руководством пуковника А. Муминагића приступило се одређивању геоида у Југославији.

На основу расположивих података угловних и дужинских мерења и астрономских опажања, спроведен је астрономски нивелман на читавој територији државе, на основу којег је извршено одређивање геоида у Југославији.

За ово одређивање од астрономских података било је коришћено:

- 30 астрономских тачака опажаних до II светског рата, на којима су одређене: астрономска ширина и азимут
- 55 Лапласових тачака

— 85 геоидних тачака на којима су опажане: астрономска ширина и дужина.

Из срачунатих висинских разлика геоида формирана је мрежа од 34 затворена полигона, која је изравната као слободна мрежа по методи условних опажања.

На основу изравнањем добијених висина геоида, састављена је карта реалног геоида, са изолинијама на 0.5 метара.

Приликом обраде података за одређивање геоида у Југославији осећала се потреба за већим бројем астрономских тачака нарочито у брдовитом и планинском подручју. За детаљније представљање геоида неопходна су нова астрономска опажања.

Добијена карта геоида у Југославији *представља само општу слику геоида израђену први пут у Југославији за читаву територију државе.*

Правци будућих одређивања

У вези одређивања *геоида*, Међународна асоцијација за геодезију Резолуцијом 25 (Гренобл — 1975), указује на неопходност израде *геоидних карата* за земље, у којима такве карте још не постоје, или нису довољно тачне и препоручује да се ови радови у дотичним земљама спроведу *комбинацијом астрогеодеетских, гравиметријских и сателитских података.*

Резолуцијом 16, Међународна асоцијација за геодезију указује на неопходност тачног познавања *детаљне структуре геоида* у Европи, па препоручује и захтева од земаља својих чланица да дају подршку за стварање мреже тачака одговарајуће густине и тачности са познатим вредностима одступања вертикала.

Одређивање геоида је веома тежак и сложен задатак, зато се његово решавање постиже кроз више итерација.

У *првој итерацији* одређивања геоида потребно је, на основу довољно густе мреже астрономских тачака (просечно 1 астрономска тачка на 100 km^2) *методом астрономског нивелмана* одредити површ *геоида* са тачношћу $\pm 5 \text{ cm}$.

Треба напоменути да се код овог одређивања не добија апсолутна оријентација геоида у односу на Земљино тело, већ се добија *релативно оријентисана површ геоида* на дотичној територији.

У *другој итерацији* је потребно из доплерских мерења, односно применом *Глобалног позиционог система* на изабраним тачкама нивелманске мреже одредити геоидне висине равномерно по читавом испитиваном подручју. Тако се може одредити са добрим приближењем оријентација геоида, односно *апсолутно оријентисани геоид.*

Циљ *треће итерације* је одређивање *фине структуре геоида.* Поред накнадних астрономских мерења, за ову сврху је потребан пре свега довољно тачан *дигитални модел висина.* Овај модел треба систематски сачинити за читаву државну територију са карата у размери 1 : 10 000.

Истовремено треба приступити *четвртој итерацији*, која има за циљ увођење података *силе тежге* у обраду. У ту сврху је потребно систематски погустити

мрежу тачака силе теже на читавом подручју државне територије.

Са оствареним напред описаним итерацијама створена је претпоставка за приступање **петој итерацији**, која се тиче *динамичке промене геоида*. Зато служе станице за систематско праћење *плиматског дисања Земљине коре*. Осим тога је потребно да опажачке сателитске станице са ласерским и доплерским системима узму учешће у међународним кампањама за изналажење *динамичких ефеката*.

Нова космичка технологија и увођење *Глобалног позиционог система* у свакодневну оперативну активност захтева веома прецизно познавање *геоида* у колико желимо да применом овога система добијемо поред положајних координата и висинску координату рачунату од нивоске површи *геоида* (надморску висину).

Да би се успешно одговорило захтевима повећане тачности одређивања геоида, при истој густини астрономских тачака од 10 km, неопходно је повећати тачност одређивања одступања вертикала односно тачност одређивања астрономских координата од $\pm 1''$ на $\pm 0''.2$ па да тачност одређивања геоида порасте од ± 5 cm на ± 1 cm.

Значај астрономског податка за геодезију

- Астрономске тачке имају велики значај за геодезију. Њихов задатак је да:
1. изврше оријентацију и лагеровање усвојеног рачунског елипсоида у Земљиним телу,
 2. ограниче нагомилавање грешака геодетског преноса и тиме повећају тачност одређивања координата у тригонометријској мрежи I. реда,
 3. омогуће рачунање редуccionих елемената за свођење мерених величина (углова и дужина) са физичке површи Земље на рачунски елипсоид,
 4. послуже као један од основних параметара код одређивања површи *геоида*
-

Референце

- Arnold, K.: 1959, *Zur Bestimmung der Geoidundulationen aus Freiluftanomalien*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam, Nr. 12.
- Arnold, K.: 1959, *Strenge Theorie der Absoluten Lotabweichungen als Funktionen der Freiluftanomalien der Schwere*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam, Nr. 13
- Arnold, K.: 1956, *Beiträge zur Gravimetrischen Geodesie*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam, Nr. 11.
- Arnold, K.: 1955, *Das Minimumsprinzip für Geoidundulationen bei der Bearbeitung astronomisch-geodätischer Netze*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Potsdam, Nr. 8.
- Baeschlin, C. F.: 1948, *Lehrbuch der Geodäsie*, Zürich.
- Baeschlin, C. F.: 1957 Eine Diskussionsfrage für die Beratungen der Europäischen Triangulationskommission. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe B, Heft Nr. 42 München.
- Baarda, W.: 1956, Einige Bemerkungen zur Berechnung und Ausgleichung grosser Systeme geodätischer Triangulation. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaft. Wissenschaftl. Übersetzungsd. Heft 7, München.
- Bruns, H.: 1878, *Die Figur der Erde*, Berlin.
- Berroth Hofmann, W.: 1960, *Kosmische Geodäsie*, Karlsruhe.
- Bošković, S.: 1952, *Skretanje vertikalna u Srbiji*, Srpska Akademija Nauka, Beograd.
- Blažko, S. N.: 1952, *Praktična astronomija*, Naučna knjiga, Beograd. (Prevod sa ruskog)
- Finsterwalder: 1937, Die Bestimmung der Lotabweichung aus der trigonometrischen Höhenmessung, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 370, 402, 472.
- Finsterwalder Gänger, H.: 1941, Die trigonometrische Höhenmessung im Gebirge, *Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst*, S 3.
- Galle, A.: 1914, *Das Geoid im Harz*, Berlin.
- Hunziker, E.: 1944, Das Geoidprofil im Parallelkreis der Eidgenössischen Sternwarte zu Zürich, Schweizerische Geodätische Kommission, Bern.
- Heiskanen, W., Vening-Meinesz: 1967, *The Earth and its Gravity Field*, New-York, Toronto, London.
- Heiskanen, W. Moritz, H.: 1967, *Physical Geodesy*, San Francisco and London.
- Helmert, F. R.: 1880, *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Leipzig.
- Hotine, M.: 1960, *A primer of non-classical geodesy*, London.
- Hofmann, W.: 1954, Die Bedeutung der gravimetrischen Methode für Geodäsie, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 324.
- Isotov, A. A.: 1959, Reference-Ellipsoid and the standard geodetic Datum adapted in the USSR, *Bulletin Geodesique*, Nr. 53, (September), Paris.
- Jordan-Eggert, Kneissl, *Astronomische und physikalische Geodäsie (Erdmessung)*, Band V von Prof. Dr. K. Ledersteger, Stuttgart.

- Kobold, F.: 1957, Die astronomischen Nivellements in der Schweiz, *Zeitschrift für Vermessungswesen*, S. 97 und 152.
- Kaula, M. W.: 1961, Geoid and World Geodetic System based on a combination of gravimetric astrogeodetic and satellite data, *Jour. Geophys. Research*, **66**, S. 1799.
- Kasansky, I.: 1935, Ein praktischer Versuch der gravimetrischen Bestimmung der Lotabweichungen. *Baltische Geodätische Kommission*, Helsinki.
- Kukkamäki, T. J.: 1959, Stellar Triangulation. *Bulletin Geodesique*, Nouvelle Serie, Nr. 54.
- Levallois, J. J.: 1962, Beziehungen zwischen klassischer und dreidimensionaler Geodäsie. Vortrag im Geodätischen Kolloquium der Technischen Hochschule Hannover am 07. 02.
- Ledersteger, K.: 1951, Die Bestimmung des mittleren Ellipsoides und der absoluten Lage der Landestriangulationen. *Osterr. Z.f. V. Sonderheft 12*, Wien, S. 49.
- Ledersteger, K.: 1958, Internationale Bezugsflächen und einheitliche Weltprojektion, S. 260.
- Molodenski, M. S.: 1937, Bestimmung der Gestalt des Geoids unter gemeinsamer Anwendung astronomisch-geodätischer Lotabweichungen und Schwerstörungen. Der Baltischen Geodätischen Kommission Helsinki.
- Molodenski, M. S.: 1958, *Grundbegriffe der Geodätischen Gravimetrie*, Berlin.
- Molodenski, M. S.: 1958, New Methods of studying the Figure of the Earth. *Bulletin Geodesique*, **50**, Paris, S. 17.
- Niethammer, Th.: 1939, Das Astronomische Nivellement im Meridian des St. Gotthard. Schweizerische Geodätische Kommission, Bern.
- Pellinen, L. P.: 1982, *Theoretische Geodäsie*, VEB Berlin.
- Svečnikov, N. S.: 1953, Viša geodezija (knj. 1). Savezna geodetska uprava, Beograd.
- Svečnikov, N. S.: 1955, Viša geodezija (knj. 2). Savezna geodetska uprava, Beograd.
- Svečnikov, N. S.: 1957, Viša geodezija (knj. 3). Savezna geodetska uprava, Beograd.
- Wolf, H.: 1959, Gravimetrisch-astronomische Punktbestimmung und Triangulation. *Deutsche Geodät. Kommission*, Reihe A 32, S. 46-52, München.
- Živković, A.: 1962, Entwurf eines wissenschaftlichen Dreiecks- und Höhennetzes für Jugoslawien. Bonn.
- Geodätische Arbeiten Österreichs für die Internationale Erdmessung Neue folge, Band III, *Das Geoid in Österreich*, Graz, 1983.
- Savezna geodetska uprava, *Osnovni geodetski radovi u FNR Jugoslaviji*, Beograd, 1953.

**THE SIGNIFICANCE AND APPLICATIONS OF ASTRONOMICAL
DATA IN GEODESY**

ALEKSANDAR ŽIVKOVIĆ

*Faculty of Civil Engineering, Institute for Geodesy,
Bulevar revolucije 73/I, 11000 Belgrade*

Abstract. Astronomical points have a great importance in geodesy. This is discussed by an analysis of four specific examples.