Зборник радова конференције “Развој астрономије код Срба XI”
Београд 18-22. април 2021,
уредник М. С. Димитријевић
Публ. Астр. друш. “Руђер Бошковић” бр. 22, 2022, 369-380

ДОПРИНОС АЛЕКСАНДРА ФРИДМАНА ТЕОРИЈИ ВЕЛИКОГ ПРАСКА

НЕНАД Ђ. ЛАЗАРОВ и ВИОЛЕТА Н. НИКОЛИЋ

Универзитет у Београду, Институт Нуклеарних Наука "Винча" — институт од националног значаја за Републику Србију, Лабораторија за теоријску физику и физику кондензоване материје,
Мике Петровића Аласа 12-14, 11 001 Београд
E-mail: lazarov@vinca.rs

Резиме: Рад се бави учешћем Александра Фридмана у теорији великог праска. Познат је по Фридмановим једначинама које описују покретни свемир, тј. свемир који може да се шири, скупља и буде статичан у зависности од параметра к (кривине), у FLRW метрици. Мада су те једначине добили и други, као што је Жорж Леметр (Georges Lemaitre), Фридман их је први добио и објавио 1922 године. Ове једначине се и данас користе за процене астрономских мерења.

Кључне речи: велики прасак, Александар Фридман, ширење космоса, FLRW метрика

1. КРАТКА БИОГРАФИЈА АЛЕКСАНДРА ФРИДМАНА

Александар Фридман је рођен 4 јуна 1888. у Петрограду (Санкт Петерсбург). Отац Александар Александрович био је балетан и композитор, а мајка Људмила Игњатијевна наставница музике. Када је имао 9 година родитељи су му се развели и он је наставио да живи у новој очевој породици. Са мајком је успоставио везу тек пред смрт. Завршио је гиманазију у Петрограду, где је проучавао астрономију. Заједно са будућим познатим математичарем, Јаковом Тамаркином, 1905. је написао рад који је послао у математички часопис (“Mathematische Annalen“ Немачка), који је следеће године 1906. објављен. Овај рад је био посвећен Бернулијевим (Bernoulli) бројевима. Када је завршио гимназију, уписао је Физичко Математички факултет на Универзитету у Петрограду. Након завршеног факултета, 1910. године, наредне три године се усавршавао на факултету одсека за математику, где се припремао за професорску титулу, држао практичну наставу, предавања, и студирао математику и физику на постдипломским студијама.

Александар Фридман

1.1 Научни рад

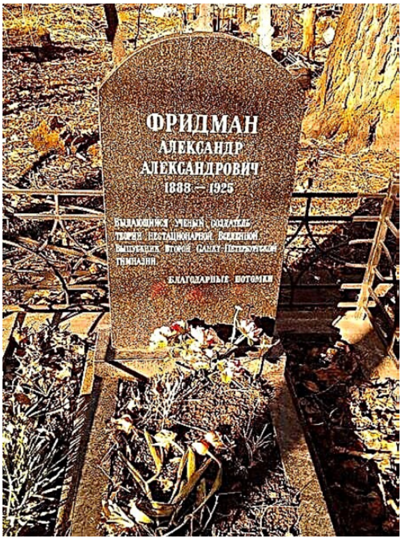
Када је Фридман имао 25 година, понуђено му је да ради у Аеролошкој опсерваторији, у близини Петрограда. Добио је позив од директора опсерваторије да студира динамичку метерологију. 1914. је отишао на праксу у Немачку код познатог метеоролога Вилхелма Бјеркнеса (Wilhelm Bjerknes) аутора теорије фронта у атмосфери. Убрзо, Фридман је летео ваздушним бродовима. У току Првог светског рата придружио се ваздухопловству, где је учествовао како у борбеним, тако и у извиђачким акцијама. Добио је за ратне заслуге следеће ордење: витез Светог Ђорђа, одликован је Златним оружијем и Орденом Светог Владимира. На крају рата се настанио у Кијеву, где је предавао у Војној школи за пилоте. Формирао је предузеће Авиаприбор за производњу авиона. Затим, на фронту је формирао метеоролошку станицу, чиме је војску снабдевао временском прогнозом. Након завршеног рата 1920. године, Фридман се запослио на управо формираном Универзитету у Перму на Физичко-Математичком факултету, где је формирао геофизички и механички институт као и три катедре. Предавао је студентима примењену аеродинамику и механику. Израчунао је модел атома са много електрона и проучавао је адијабатске инваријанте. Био је главни уредник часописа "Journal of Geophysics and Meteorology". Радио је у више опесерваторија, да би постао и шеф Главне Геофизичке Опсерваторије.

1.2 Научна достигнућа

Био је аутор низа радова из области динамичке метерологије, хидродинамике компресибилних течности, физике атмосфере и релативистичке космологије. Заједно са Павелом Федосејенком (Павел Федосеенко) летео је балоном и достигао висину од 7400 m, што је тада била рекордна висина у СССР-у. Међу првима је савладао тензорски рачун и почео је да га предаје на предмету општа релативност. Фридман је постао аутор научног рада "Свет као Простор и Време", чиме је помогао својим грађанима да се упознају са новом физиком. Најзначајније дело по којем је познат у свету су Фридманове једначине по којима је створио динамички свемир, који предвиђа ширење свемира, за разлику од Шварцшилдовог (Schwarzschild) модела који предвиђа статичан космос и који се може посматрати као специфичан случај. Космос је почео да се шири из тачке до неког максимума, а онда опет почиње да се сажима у тачку, што значи да осцилује. То осциловање је предвидео и Ајнштајн (Einstein) тако што је увео космолошку константу што доводи до појаве Хукове (Hooke) силе осциловања. Ајнштајн је увео космолошку константу да би помирио Хука и Њутна (Newton), због тога што је Хук оптуживао Њутна да му је украо у изразу за силу гравитације обрнуту пропорционалност квадрату растојања између два масена објекта. Такође Фридман је познат по Фридман Робертсон Леметр Вокер (Alexandar Friedmann, Georges Lemaitre, Howard P. Robertson and Arthur Geoffrey Walker, FRLW metric) метрици, која је, за разлику од Шварцшилдове метрике, временски зависна, тј. није стационарна. Мада је космолошка константа уведена да би се добила позитивна густина материје, јер је решавањем Ајнштајнових једначина за стационарни космос (Шварцшилдова метрика) добијена нелогичност (да је густина материје у тензору енергије и импулса негативна, односно притисак би требао да буде негативан да би густина материје била позитивна, што нема физичког смисла).

1.3 Лични живот

Прва супруга Александра Фридман била је Екатарина Дорофејева. Након тога оженио се младом девојком Наталијом Малинином. Из тог брака добио је сина Александра. Наталији је касније додељена диплома доктора математичких и физичких наука. Поред тога била је на челу Лењинградског огранка Института за магнетизам, јоносферу и ширење радио таласа Академије наука СССР-а.



Гроб Александра Фридмана

1.4 Смрт

Фридман је умро у 37 години од трбушног тифуса, тако што се заразио неоправном крушком коју је купио на железничкој станици у Кијеву.

2. ФРИДМАН РОБЕРТСОН ЛЕМЕТР ВОКЕР МЕТРИКА (FRLW METRIKA), ФРИДМАНОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

2.1 Ајнштајнове једначине[1]

Разматраћемо космос који почива на космичким принципима, а то је да је космос хомоген и изотропан на великим скалама. Општа теорија релативности настала је проширењем специјалне теорије релативности, увођењем гравитације и кретањем у неинерцијалним системима. Она почива на два принципа: општи принцип релативности и принцип еквиваленције. Први принцип гласи: сви физички закони имају исти облик у било ком систему референције, док принцип еквиваленције следи из експерименталне провере да је инертна и гравитациона маса једнака за сва тела. Принцип еквиваленције се формулише тако, да се увек може изабрати такав систем референције, да у њему гравитација локално нестаје односно простор се локално може посматрати као простор Минковског (Minkowski). Ајнштајн је поље сила заменио псудо Римановом (Riemann) геометријом, односно

[1] Einstein, 1915, 1916.

његова главна идеја је да маса закривљује простор. Ајнштајнове једначине поља су дате једначином:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{-8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

gde je $R_{\mu\nu}$ Ричијев (Ricci) тензор, R је Ричи скалар, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор који је уједно и тензор гравитационог поља, G гравитациона константа, c је брзина светлости, $T_{\mu\nu}$ је тензор енергије и импулса, Λ је космолошка константа која представља густину енергију вакуума. Експлицитни израз за тензор енергије и импулса у моделу идеалног флуида је:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}$$

где је $u_\mu = (1,0,0,0)$ макроскопска брзина медиума. Идеалан флуид је флуид који је изотропан у систему који мирује. Величина $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ се зове Ајнштајнов тензор.

2.2 Увод у Фридманове једначине[2]

Фридманове једначине, динамичке једначине хомогеног и изотропног космоса, су добијене из Ајнштајнових једначина. Питање је зашто Њутн није добио те једначине. Проблем је садржан у томе што је Њутнова механика глобална теорија, и укључује гравитациони потенцијал који дивергира у хомогеном и изотропном космосу. Општа релативност је локална теорија, која укључује диференцијалну геометрију, за разлику од диференцијалног рачуна у Њутновој механици. Растојање у хомогеном и изотропном простор времену динамичког космоса се изражава Фридман Робертсон Леметр Вокер метриком.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \right]$$

где је $a(t)$ космички фактор скалирања који зависи од времена и описује еволуцију васионе као и однос између две тачке у васиони. Константа к описује закривљеност простора. FLRW метрика описује изотропни космос. Као што се може видети, не постоје чланови који су мешани, тј. који садрже и временске и просторне координате, тако да не постоји привилегован правац. Пошто је метрика сферно-симетрична, описује хомоген космос. У садашње време, $a(t)$ се дефинише као 1. Ради једноставности, ставићемо да је $a(t) \equiv a$. Ако је $k = 0$ и $a^2(t) = 1$ имамо обичну еуклидску метрику у сферним координатама, ако је$k > 0$ имамо затворен космос (запремински

[2] Грујић, 2015; Friedmann, 1922, 1966, 1999; Romeu, 2014.

интеграл конвергира), ако је$k < 0$ имамо отворен космос (запремински интеграл дивергира).

Сада ћемо да дефинишемо Ричијев тензор $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\nu}\Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\alpha},$$

где су $\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\nu}$ Кристофелови (Christoffel) симболи друге врсте дати следећим изразом:

$$\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(g_{\sigma\varepsilon,\nu} + g_{\sigma\nu,\varepsilon} - g_{\varepsilon\nu,\sigma}\right),$$

$\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}}{\partial x^{\nu}}$јеизвод Кристофеловог симбола друге врсте по координати. $g_{\mu\nu,\alpha} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}$ извод метричког тензора по координати. Док је четворовектор координата дат $x^{\nu} = (ct, r, \theta, \varphi)$. Елементи метричког тензора су:

$$g_{00} = -1, g_{11} = \frac{a^2}{1-kr^2}, g_{22} = a^2r^2, g_{33} = a^2r^2sin^2\theta,$$

док су елементи реципрочног метричког тензора

$$g^{00} = -1, g^{11} = \frac{1-kr^2}{a^2}, g^{22} = 1/a^2r^2\,, g^{33} = 1/a^2r^2sin^2\theta$$

Кристофелови симболи друге врсте који немају вредност нула су

$$\Gamma^{0}_{11} = \frac{1}{c}\frac{a\acute{a}}{1-kr^2}, \Gamma^{0}_{22} = \frac{1}{c}a\acute{a}r^2, \Gamma^{0}_{33} = \frac{1}{c}a\acute{a}r^2sin^2\theta$$

$$\Gamma^{1}_{10} = \Gamma^{1}_{01} = \Gamma^{2}_{20} = \Gamma^{2}_{02} = \Gamma^{3}_{03} = \Gamma^{3}_{30} = \frac{\acute{a}}{ca}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}, \Gamma^{1}_{22} = -r(1-kr^2), \Gamma^{1}_{33} = -r(1-kr^2)sin^2\theta$$

$$\Gamma^{2}_{12} = \Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{3}_{13} = \Gamma^{3}_{31} = \frac{1}{r}, \Gamma^{2}_{33} = -sin\theta cos\theta, \Gamma^{3}_{23} = \Gamma^{3}_{32} = ctg\theta$$

Следећи Ричијеви тензори су ненулти:

$$R_{00} = \frac{3}{c^2}\frac{\acute{a}}{a}, R_{11} = \frac{-1}{c^2}\frac{a\acute{a}}{1-kr^2} - \frac{2}{c^2}\frac{\acute{a}^2}{1-kr^2} - \frac{2k}{1-kr^2}$$

$$R_{22} = \frac{-1}{c^2} r^2 a\acute{a} - \frac{2}{c^2} r^2 \acute{a}^2 - 2kr^2, R_{33} = R_{22} sin^2\theta$$

Ричијев скалар је:$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{-6}{c^2} \frac{\acute{a}}{a} - \frac{6}{c^2} \frac{\acute{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2}$

Прва Фридманова једначина

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R - \Lambda g_{00} = \frac{-8\pi G}{c^4} T_{00}$$

$$R_{00} + \frac{1}{2} R + \Lambda = \frac{-8\pi G}{c^4} \rho c^2$$

Тако се добија прва или временска Фридманова једначина:

$$\frac{\acute{a}^2}{a^2} = \frac{-kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}$$

Друга или просторна Фридманова једначина је:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \frac{-8\pi G}{c^4} T_{ij}$$
$$g^{ij} R_{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij} R - \Lambda g^{ij} g_{ij} = \frac{-8\pi G}{c^4} p g^{ij} g_{ij}$$

$$R - g^{00} R_{00} - \frac{1}{2} 3R - 3\Lambda = \frac{-8\pi G}{c^4} 3p$$
$$R_{00} - \frac{1}{2} R - 3\Lambda = \frac{-8\pi G}{c^4} 3p$$

Тако се добија $\frac{\acute{a}}{a} + \frac{\acute{a}^2}{2a^2} = \frac{-kc^2}{2a^2} + \frac{\Lambda c^2}{2} - \frac{4\pi G p}{c^2}$

Заменом прве једначине у другу добијамо другу Фридманову једначину:

$$\frac{\acute{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Прва и друга Фридманова једначина:

$$\frac{\acute{a}^2}{a^2} = \frac{-kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$\frac{\acute{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Ако другу једначину представимо у следећем облику:

$$m\acute{a}R_0 = \frac{-4\pi GmaR_0}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2 mR_0}{3}a$$

где је R_0радијус космоса у садашњем тренутку. Видимо да се једначина претвара у други Њутнов закон по коме је производ масе и убрзања ширења космоса једнак суми следећих сила које делују на пробно тело масе ***m***: гравитационе силе, која потиче од тела које се могу окарактерисати густином (као што су планете), затим силе која потиче од тела која се могу окарактерисати притиском (као што су космичке маглине и прашине, које делују тако што га привлаче ка центру), и силе која делује као Хукова сила осциловања (која садржи космичку константу и која је одговорна за ширење и скупљање космоса тј. осциловање свемира).

3. НЕКА РЕШЕЊА ФРИДМАНОВИХ ЈЕДНАЧИНА[3]

Фридман је посматрао нека решења његових једначина:

$$\frac{\acute{a}^2}{a^2} = \frac{-kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$\frac{\acute{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Ако узмемо случај да је притисак нула и узмемо да густина зависи од времена, добијамо следеће поједностављене једначине:

$$\frac{\acute{a}^2}{a^2} = \frac{-kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3}$$

$$\frac{\acute{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Заменом густине из једне једначине у другу и ако узмемо да је *c=1*, добијамо:

$$\frac{\acute{a}^2}{a^2} + 2\frac{\acute{a}}{a} + \frac{k}{a^2} = \Lambda$$

[3] Грујић, 2015; Yan X.-P., 2015.

односно $\acute{a}^2 + 2a\acute{a} + k = \Lambda a^2$

Први случај је када је космолошка константа једнака нули $\Lambda = 0$. Тада се једначина своди на следећи облик:

$$\acute{a}^2 + 2a\acute{a} + k = 0$$

која описује Леметр Толман Бонди (Lemaitre-Tolman-Bondi) модел (ЛМТ модел). Решавањем задње једначине добијамо:

$$\acute{a}^2 + k = -2a\frac{\acute{a}d\acute{a}}{da}$$

$$\frac{-da}{2a} = \frac{\acute{a}d\acute{a}}{\acute{a}^2 + kda}$$

Интеграљењем горње једначине добијамо да је:

$$\acute{a}^2 = \frac{C}{a} - k$$

што је еволуциона једначина ЛМТ модела, где је *C*=*C(r)*. Нормирамо претходну једначинu са $|k|$

$$\frac{\acute{a}^2}{|k|} = \frac{C}{a|k|} - \bar{k}$$

где је $\bar{k} = -1,0,1$. Увођењем помоћне променљиве η решења горње једначине се могу написати у следећем облику:

$$a(r,t) = \frac{C}{2|k|}\frac{ds(\eta)}{d\eta}, \text{са} t - t_B = \frac{Cs(\eta)}{2|k|^{1.5}}$$

$$\left(\frac{d^2s(\eta)}{d\eta^2}\right)^2 = -|k|\left(\frac{ds(\eta)}{d\eta}\right)^2 + 2\frac{ds(\eta)}{d\eta}$$

Решење претходне једначине је дато изразом

$$s(\eta) = \begin{Bmatrix} \eta - sin(\eta)\text{за}k = 1 \\ -\eta + sinh(\eta)\text{за}k = -1 \\ \frac{\eta^3}{6} \end{Bmatrix}$$

Заменом вредности $s(\eta)$ у једначине за a и t добијамо коначна решења за ове једначине:

$$a(r,t) = \frac{C}{2k}\left(1 - cosh\,(\eta)\right), t - t_B = \frac{C\left(-\eta + sinh(\eta)\right)}{2(-k)^{1.5}}, zak = -1$$

$$a(r,t) = \frac{C}{2k}\left(1 - cos\,(\eta)\right), t - t_B = \frac{C\left(\eta - sin(\eta)\right)}{2(k)^{1.5}}, zak = 1$$

$$a(r,t) = \left[9\frac{C}{4}\right]^{\frac{1}{3}}[t - t_B]^{\frac{2}{3}}, zak = 0$$

Други случај је када је космолошка константа различита од нули $\Lambda \neq 0$. Тада се једначина своди на следећи облик:

$$\acute{a}^2 + 2a\acute{a} + k = \Lambda a^2$$

Ако је *k=0* имамо следећу једначину

$$\acute{a}^2 + 2a\acute{a} - \Lambda a^2 = 0$$

Решење се тражи у облику $a = Cexp(\lambda t)$

Заменом пробног решења у претходну једначину добијамо

$$C^2\lambda^2 exp(2\lambda t) + 2C^2\lambda^2 exp(2\lambda t) - \Lambda C^2 exp(2\lambda t) = 0$$

Из једначине се добија

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$$

Те се добија да су решења дата следећом једначином

$$a = Cexp\left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right]$$

Ако је *k=1* добија се једначина $\acute{a}^2 + 2a\acute{a} + 1 = \Lambda a^2$.

Решење ове једначине је дато следећим изразом

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} cosh\left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right]$$

Ако је $k=-1$ добија се једначина $\acute{a}^2 + 2a\acute{a} - 1 = \Lambda a^2$.

Решење ове једначине је дато следећим изразом

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} sinh\left[\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right]$$

4. ЗАКЉУЧАК

Као што се може видети из Фридманових једначина и њихових решења можемо да закључимо да Фридманова решења описују динамички хомоген и изотропан космос. Решавањем Фридманових једначина у случају када је космолошка константа нула добијамо такозвани ЛМТ (Lemaitre-Tolman-Bondi) модел, чија решења су позната као хиперболично за $k<0$, параболично за $k=0$ и елиптичко за $k>0$ еволуција. Значење ове три произвољне функције, које зависе од r су:

k(r)/2-је енергија по јединици масе честица прашине које се крећу дуж координатног радијуса *r*.

C(r)/2-гравитациона маса унутар покретне сфере радијуса *r*.

$t_B(r)$-време великог праска за светске линије у тачки *r*.

Решавањем једначина за случај када је космолошка константа различита од нуле, добијају се решења која су комбинација експоненцијалних функција, тј синусхиперболично решење за $k=-1$, експоненцијално за $k=0$, косинусхиперпоблично решење за $k=1$.

Сва решења које је добио Фридман су једна од првобитних решења која показују да се космос шири, скупља, периодично осцилује, тј. да је космос динамички, те није статички како је раније предвиђано. Иако је у наредних 60 година владао статички модел, на крају је превладао динамички модел космоса.

Литература

Einstein, A.: 1916. The Foundation of the General Theory of Relativity, *Annalen der Physik,* 49(7), 769-822

Einstein, A.: 1997, *The Field Equation of Gravitation, Session of the physical mathematical class on Novembar 25, 1915*, In. *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6, The Berlin Years: Writings, 1914-1917,* Princeton University Press, 117

Friedmann, A.: 1922, *Zeitschrift für Physi*k **10**, 377-386.

Фридман, А.А.: 1966 *Избранные труды*, Наука, Москва, стр.386-389, преведено на српски Академска књига.

Friedmann, A.: 1999, *General Relativity* **31(12)**, translated on english original work: Friedmann, A.: 1924, *Zeitschrift für Physik* **21**, 326-332.

Грујић Јелена М.: 2015, *Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације*, докторска дисертација, Математички факултет Универзитета у Београду

Romeu Joan Arnau: 2014, *Derivation of Friedman equations*, Facultat de Fisica, Universitat de Barcelona, Spain.

Yan X.-P., Liu D.-Z., Wei H.: 2015, *Physics Letters* B, **742**, 149-159.

THE CONTRIBUTION OF ALEXANDER FRIEDMANN TO THE BIG BANG THEORY

In this paper, we presented the participation of Alexander Friedmann in the Big Bang Theory. He is known for his Friedmman equations which describe the dynamic cosmos, ie. it expands, shrinks, and becomes static in depends on curvature parameter *k* in FLRW metric. By the way, these equations are given also, by others, such as, for example, Georges Lemaitre. Friedmann have got first equations and published in 1922 year. These equations are used for assessment of astronomical measurements today.

Key words: Big bang, Alexander Friedmann, Expansion of the Universe, FLRW metrics