

Истраживања галактичких и вангалактичких гравитационих појава на Астрономској опсерваторији (2019-2023)

Предраг Јовановић¹, Весна Борка Јовановић²,
Душко Борка²

¹Астрономска опсерваторија, Волгина 7, п. фах 74, 11060 Београд,
Србија

²Лабораторија за теоријску физику и физику кондензоване материје
(020), Институт за нуклеарне науке "Винча", п. фах 522, 11001
Београд, Србија

Научно-истраживачка група за гравитацију и космологију

- истраживања започета у оквиру националног пројекта ОИ 176003 "Гравитација и структура космоса на великим скалама" (2011-2019)
 - руководилац: др Предраг Јовановић
 - финансијер: Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
- наставак и проширење истраживања у оквиру "Групе за гравитацију и космологију"

Имајући у виду да су истраживања гравитације и са њом повезаних астрономских и космолошких појава и објеката, која су се у претходном периоду одвијала на Астрономској опсерваторији, резултовала веома значајним научним резултатима, основана је научно-истраживачка група за гравитацију и космологију, која је наставила и проширила постојећа научна истраживања, а такође покреће и потпуно нова истраживања у овој области.

Истраживачки тим

- "Група за гравитацију и космологију" основана на АОБ 2022. године
 - предлагач : др Предраг Јовановић
 - финансијер: Министарство науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије
 - сарадња са истраживачима из ИНН Винча
- Истраживачи "Групе за гравитацију и космологију":
 - др Предраг Јовановић, научни саветник АОБ,
 - др Еди Бон, виши научни сарадник АОБ,
 - др Наташа Бон, виши научни сарадник АОБ,
 - др Мирослава Вукчевић, научни сарадник АОБ.
- Истраживачи теме "Гравитација и астрофизика честица":
 - др Душко Борка, научни саветник ИННВ,
 - др Весна Борка Јовановић, научни сарадник ИННВ,
 - др Ненад Лазаров, стручни саветник ИННВ.

О истраживањима I

- главни научни циљ истраживања: добијање нових фундаменталних сазнања о гравитационој интеракцији и њеним последицама на различитим астрофизичким скалама, почевши од Сунчевог система, преко галактичких, вангалактичких па све до космолошких скала
- врсте истраживања: теоријска разматрања, нумеричке симулације и поређења теоријских резултата са астрономским посматрањима

Истраживања групе обухватају:

- а) проверу предвиђања стандардне (општа теорија релативности) и теорија модификоване гравитације помоћу астрономских посматрања
- б) појединачне и двојне црне рупе у центрима галаксија и квазара, као и њихове релативистичке ефекте (нпр. орбиталну прецесију и гравитациони црвени помак)
- в) гравитационе таласе (из масивних двојних система и примордијалне), као и одговарајуће електромагнетне ефекте њихових извора

О истраживањима II

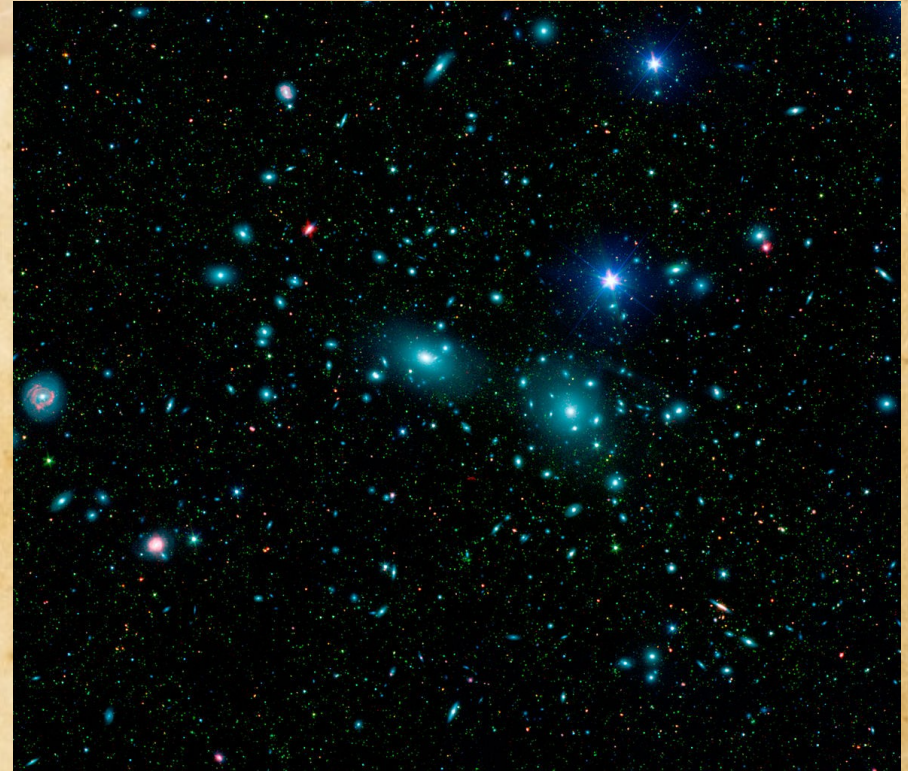
Даље, истраживања обухватају:

- г) гравитациона сочива и њихове примене у посматрачкој космологији и за изучавање расподеле видљиве и тамне материје у галаксијама - изворима и сочивима
- д) стандардни модел Λ CDM, као и космолошке моделе засноване на алтернативним теоријама гравитације и њихову могућност да објасне тензију у вези Хаблове константе
- ђ) објашњење посматране галактичке и вангалактичке динамике (равне ротационе криве и барионска Тали-ФишEROVA релација код спиралних, као и фундаментална раван код елиптичних галаксија) и посматраних аномалија у кретању планета Сунчевог система без хипотезе о тамној материји.
- е) променљивост типа активних галаксија у времену и однос између звезданих спектра галаксије домаћина и активности у језгру галаксије,
- ж) механизме убрзавања ултра-високо енергетских космичких зрака унутар наше галаксије.

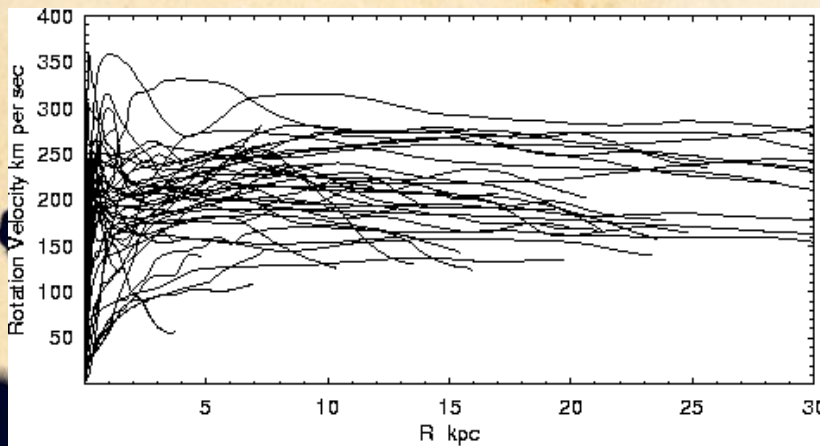
Хладна тамна материја (ТМ)

- **Фриц Цвики** - гравитациона маса галаксија у јату Кома добијена помоћу виријалне теореме је 400 пута већа него што следи из њиховог сјаја: "dunkle (kalte) Materie" (Zwicky, 1933, NPA, 6, 110)

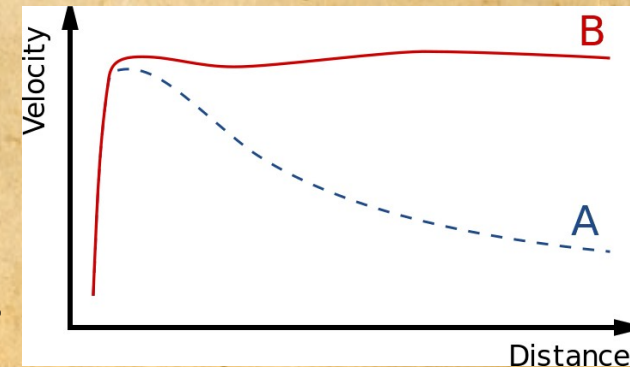
Галактичко јато Кома
(Coma Berenices, Abell 1656)



- **Вера Рубин:** равне ротационе криве код спиралних галаксија

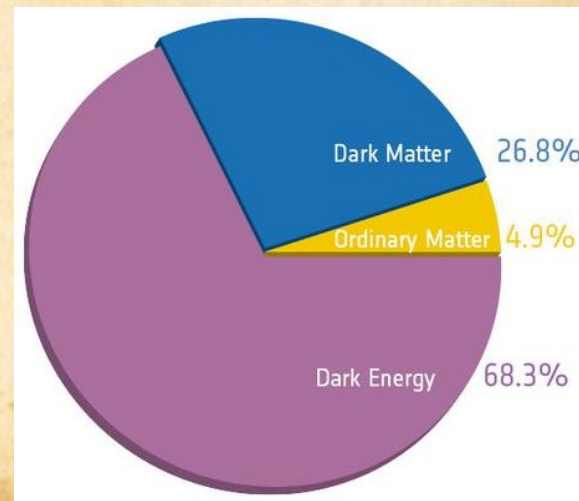
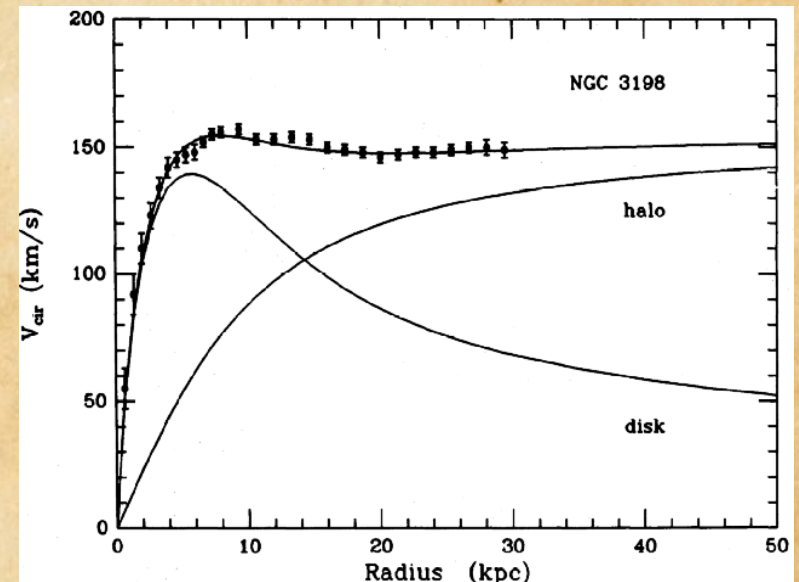
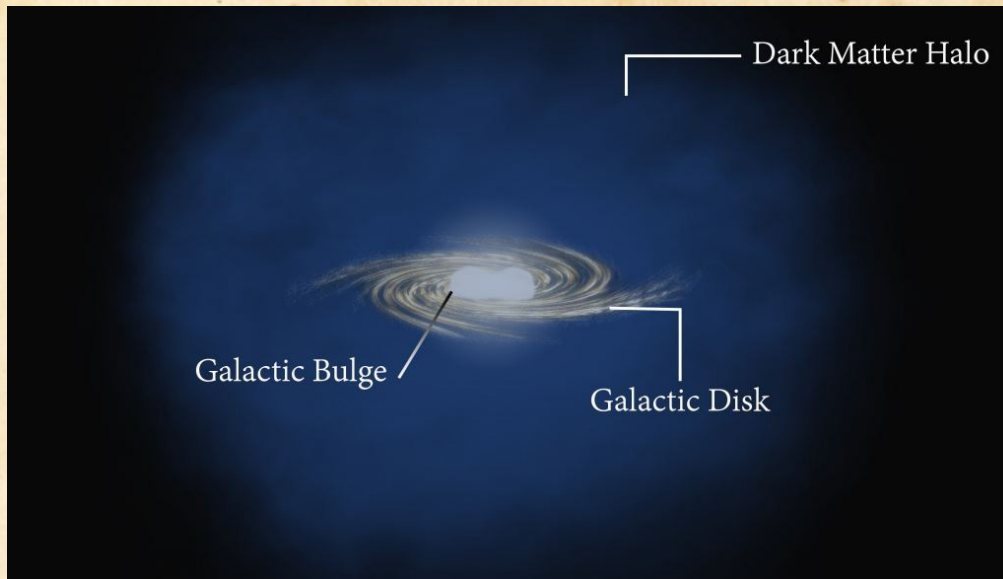


(Sofue & Rubin, 2001, ARA&A, 39, 137)



Хипотеза о халоу тамне материје

- **Хладна тамна материја:** чини $5/6$ укупне масе космоса и састоји се од небарионских слабо интерагујућих масивних честица (WIMP) које се крећу спорије од c и само под утицајем гравитације



Структура космоса
по Λ CDM моделу

Објашњење неких аномалија у Сунчевом систему

- Орбитална (Шварцшилдова) прецесија у ОТП:

$$\Delta\varphi_{GR}^{rad} \approx \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$$

- Посматрана мала одступања од превиђања ОТП у случају планета Сунчевог система
- Стопа промене гравитационе константе G :
 $-2.9 \times 10^{-14} < \dot{G}/G < +4.6 \times 10^{-14}$ по години (Pitjeva et al. 2021, A&A, 647, A141; Pitjeva 2010, IAUS, 261, 170)
- Секуларно смањење AU (Pitjeva 2012, Proc. JSR2011, 17)

Table 4. Additional perihelion precessions from observations of planets and 19 spacecraft.

Planets	$\dot{\pi}$ (mas yr ⁻¹)	$ \sigma_{\dot{\pi}}/\dot{\pi} $
Mercury	-0.020 ± 0.030	1.5
Venus	0.026 ± 0.016	0.62
Earth	0.0019 ± 0.0019	1.0
Mars	$-0.000\,20 \pm 0.000\,37$	1.9
Jupiter	0.587 ± 0.283	0.48
Saturn	-0.0032 ± 0.0047	1.5

Table 5. Estimates of the density ρ_{dm} obtained from $\sigma_{\Delta\pi}$ for the perihelion precessions.

Planets	$\sigma_{\dot{\pi}}$ (arcsec yr ⁻¹)	ρ_{dm} (g cm ⁻³)
Mercury	0.000 030	$<9.3 \times 10^{-18}$
Venus	0.000 016	$<1.9 \times 10^{-18}$
Earth	0.000 0019	$<1.4 \times 10^{-19}$
Mars	0.000 000 37	$<1.4 \times 10^{-20}$
Jupiter	0.000 283	$<1.7 \times 10^{-18}$
Saturn	0.000 0047	$<1.1 \times 10^{-20}$

MNRAS **432**, 3431–3437 (2013) doi:10.1093/mnras/stt695
Advance Access publication 2013 May 12

Relativistic effects and dark matter in the Solar system from observations of planets and spacecraft

E. V. Pitjeva^{1*} and N. P. Pitjev²

nature
astronomy

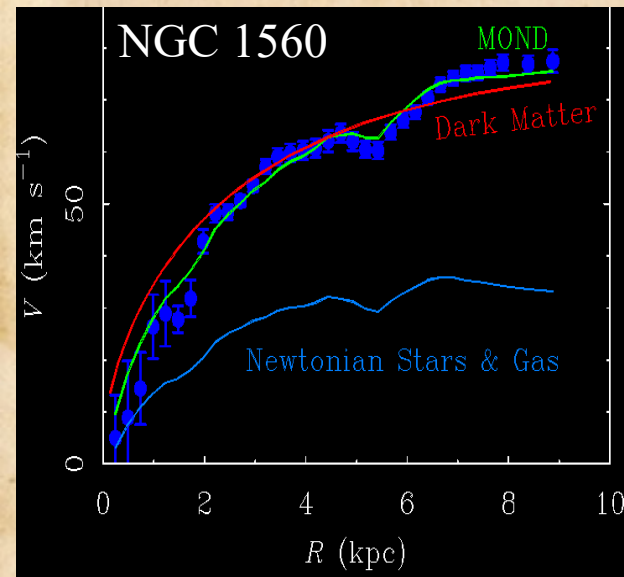
REVIEW ARTICLE

PUBLISHED: 2 MARCH 2017 | VOLUME: 1 | ARTICLE NUMBER: 0059

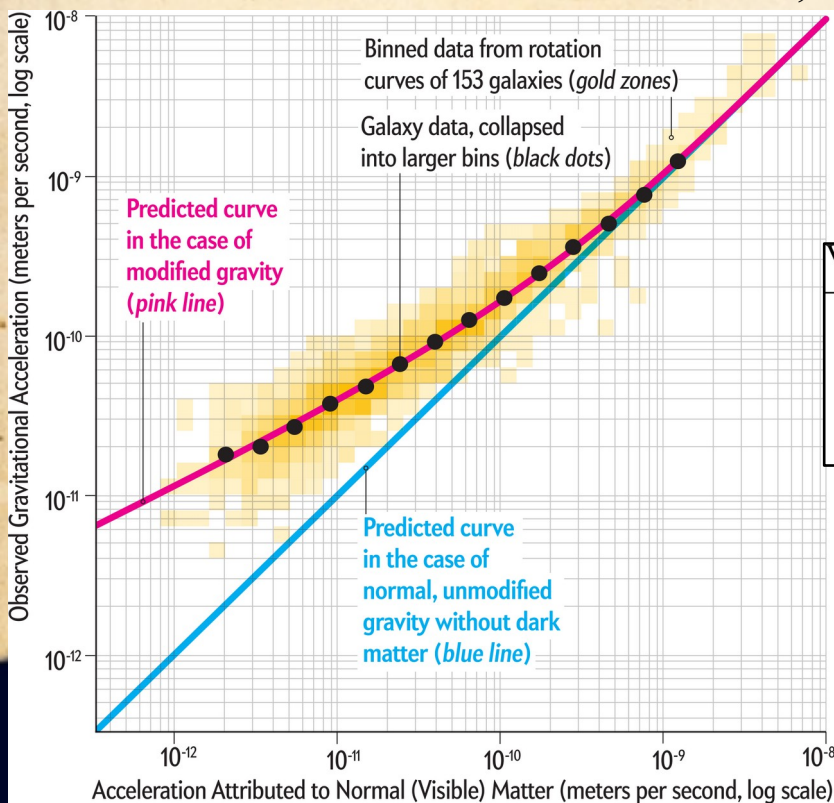
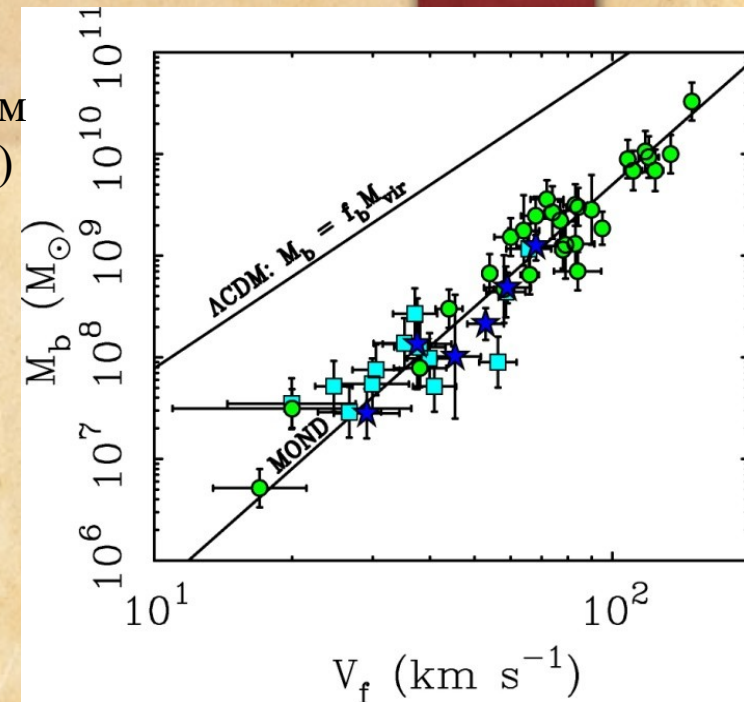
How dark matter came to matter

J. G. de Swart^{1,2,3*}, G. Bertone^{1,3} and J. van Dongen^{1,2}

Неслагања између предвиђања модела са ТМ и посматрања



- Барионска Тали-ФишEROва релација за галаксије богате гасом (McGaugh 2011, PRL, 106, 121303)
- Релација за радијална убрзања: корелација између убрзања добијених из ротационих кривих и оних предвиђених на основу расподеле барионске материје (Hossenfelder & McGaugh 2018, SciAm, 319, 36)



- Сагласност са теоријама модификоване гравитације
- Модификације природе ТМ

VOLUME 84, NUMBER 17

PHYSICAL REVIEW LETTERS

Observational Evidence for Self-Interacting Cold Dark Matter

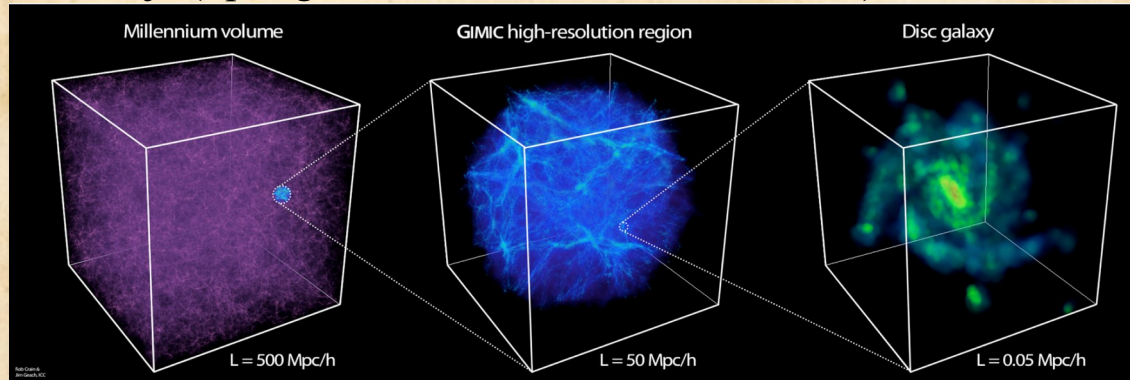
David N. Spergel and Paul J. Steinhardt

The nongravitational interactions of dark matter in colliding galaxy clusters

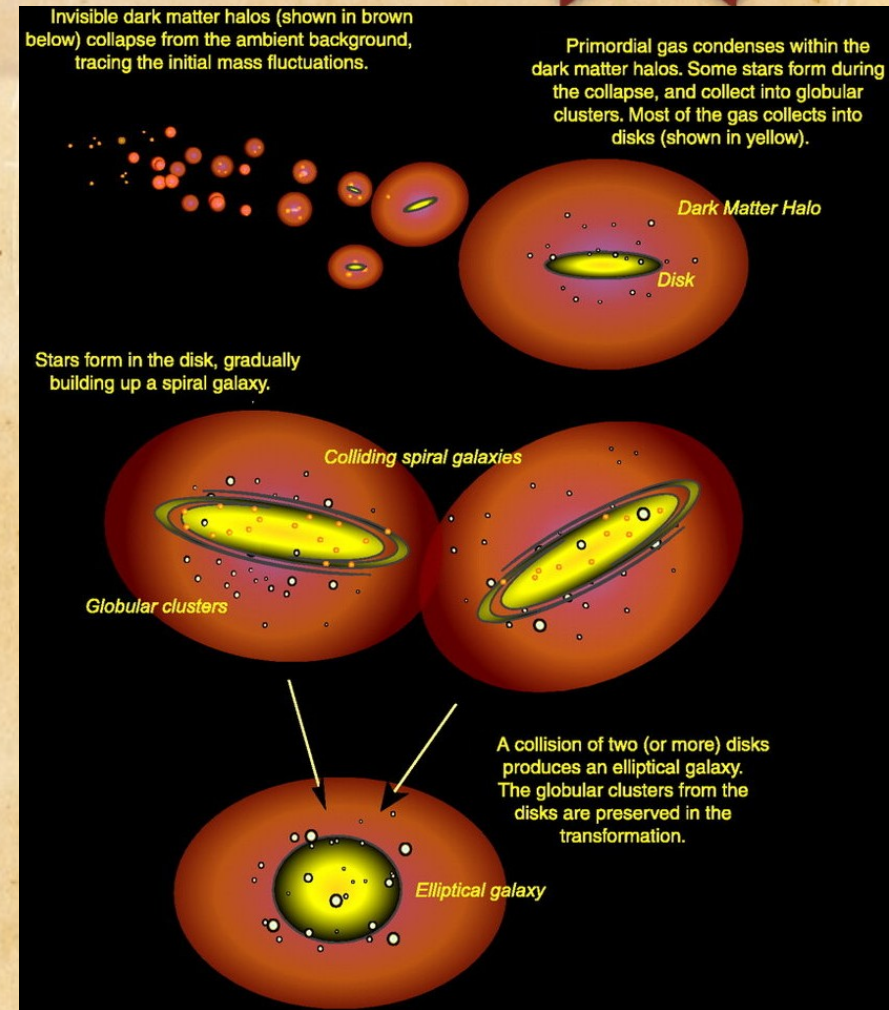
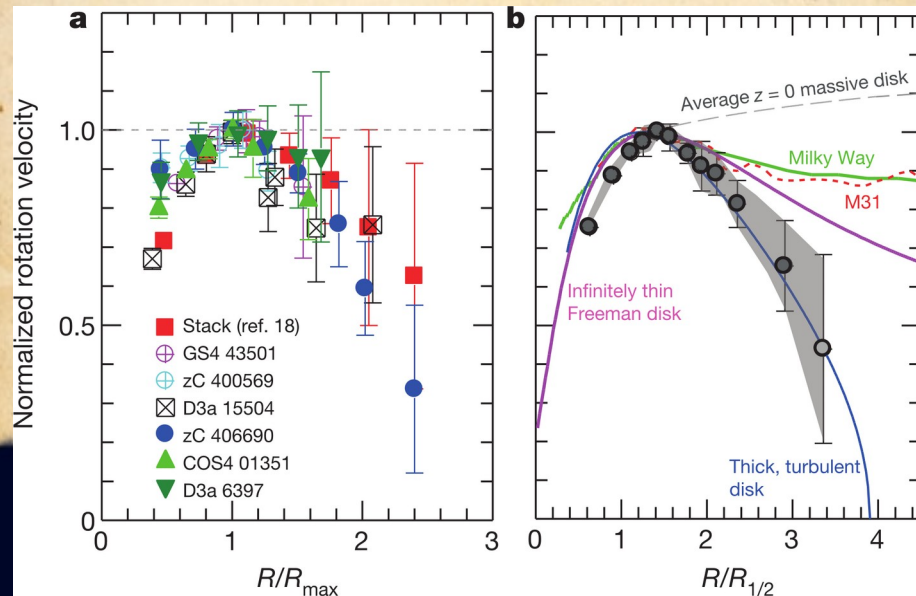
David Harvey,^{1,2*} Richard Massey,³ Thomas Kitching,⁴ Andy Taylor,² Eric Tittley²

Опадајуће ротационе криве код галаксија из епохе максималног формирања

- Космолошке симулације у Λ CDM моделу: ТМ се прво скупља и формира халое, у чијим центрима се затим формирају галаксије (Springel et al. 2006, Nature, 440, 1137)



- Несклад са посматраним узорком галаксија на $z \sim 0.9 - 2.4$:
 - опадајуће ротационе криве и занемарљиво присуство ТМ у епохи када је био максимум формирања галаксија
 - доминација барионске материје расте са z



LETTER

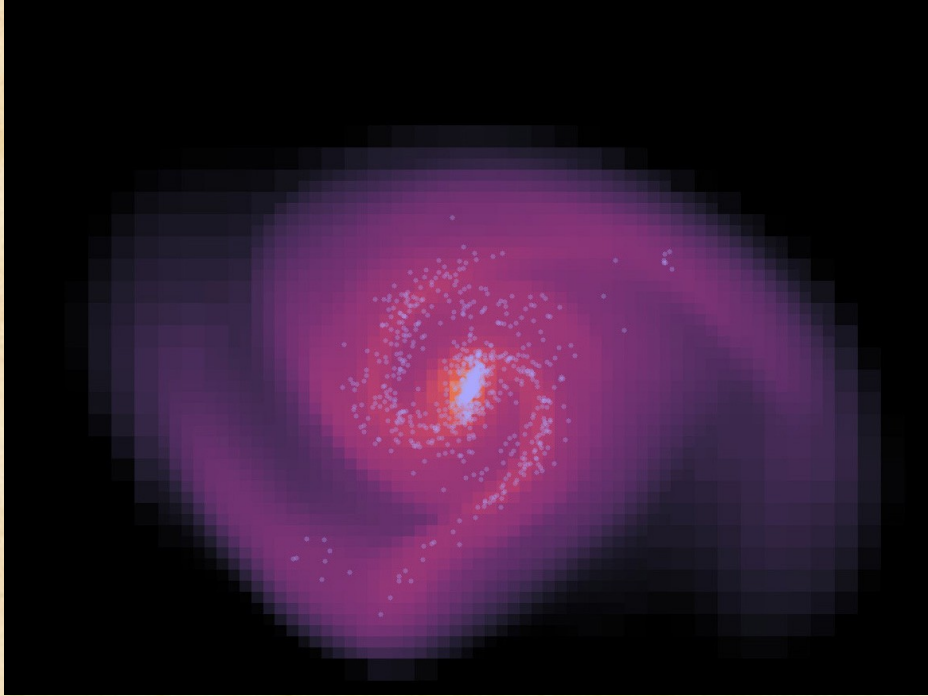
Strongly baryon-dominated disk galaxies at the peak of galaxy formation ten billion years ago

R. Genzel^{1,2}, N. M. Förster Schreiber¹, H. Übler¹, P. Lang¹, T. Naab³, R. Bender^{1,4}, L. J. Tacconi¹, E. Wisnioski¹, S. Wuyts^{1,5}, T. Alexander⁶, A. Beifiori^{1,4}, S. Belli¹, G. Brammer⁷, A. Burkert^{1,3}, C. M. Carollo⁸, J. Chan¹, R. Davies¹, M. Fossati^{1,4}, A. Galametz^{1,4}, S. Genel⁹, O. Gerhard¹, D. Lutz¹, J. T. Mendel^{1,4}, I. Momcheva¹⁰, E. J. Nelson^{1,10}, A. Renzini¹¹, R. Saglia^{1,4}, A. Sternberg¹², S. Tacchella⁸, K. Tadaki¹ & D. Wilman^{1,4}

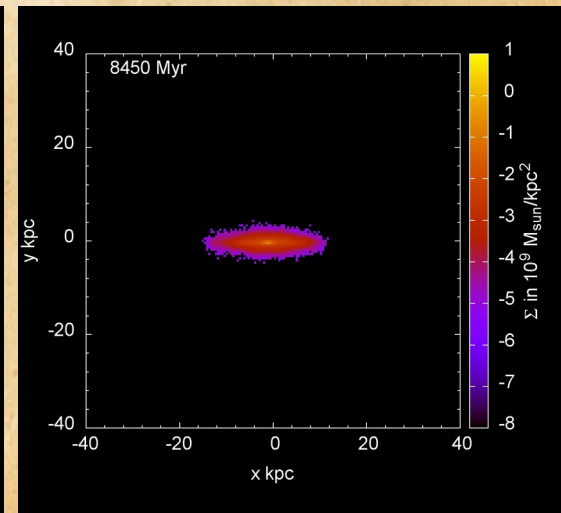
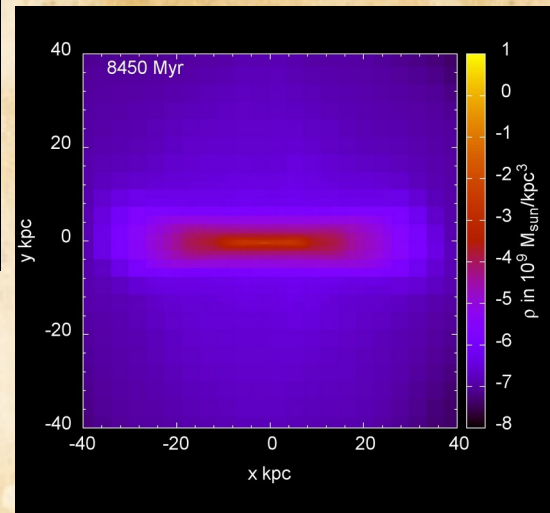
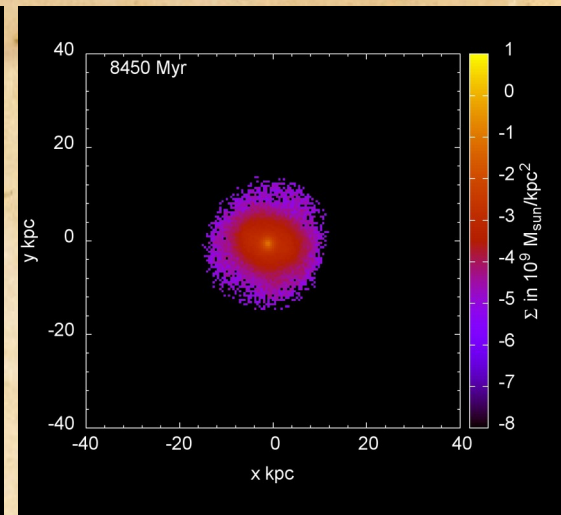
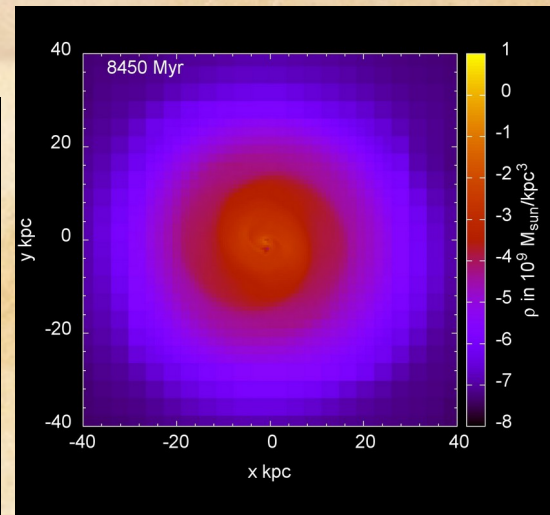
doi:10.1038/nature21685

Симулације формирања галаксија у модификованој гравитацији без ТМ

- Такве симулације се већ раде у МОНД-у



- Горе: симулирана расподела материје након 1.5 милијарди година: светлије нијансе одговарају већој густини гаса, док светло-плаве тачке означавају звезде



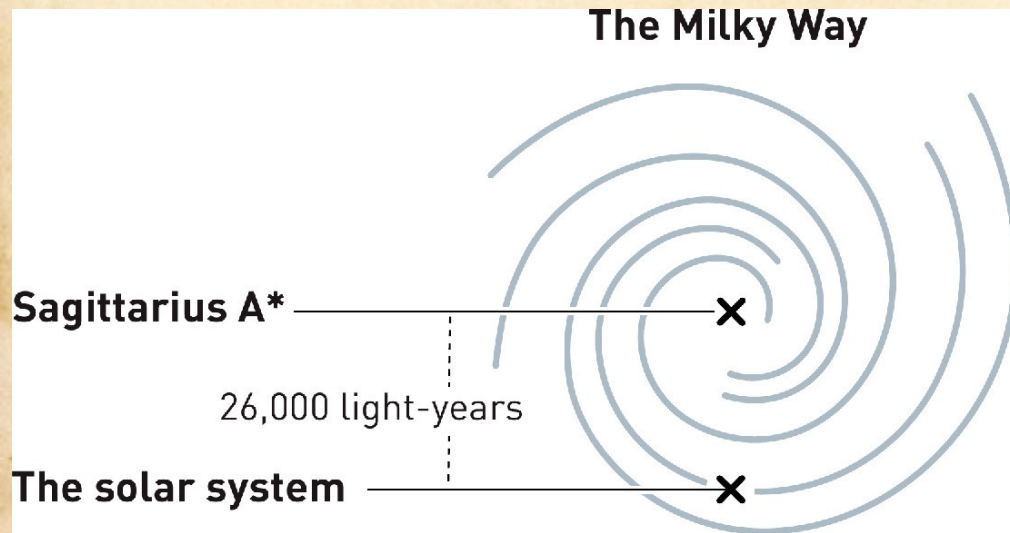
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 890:173 (27pp), 2020 February 20

© 2020. The American Astronomical Society. All rights reserved.

The Formation of Exponential Disk Galaxies in MOND

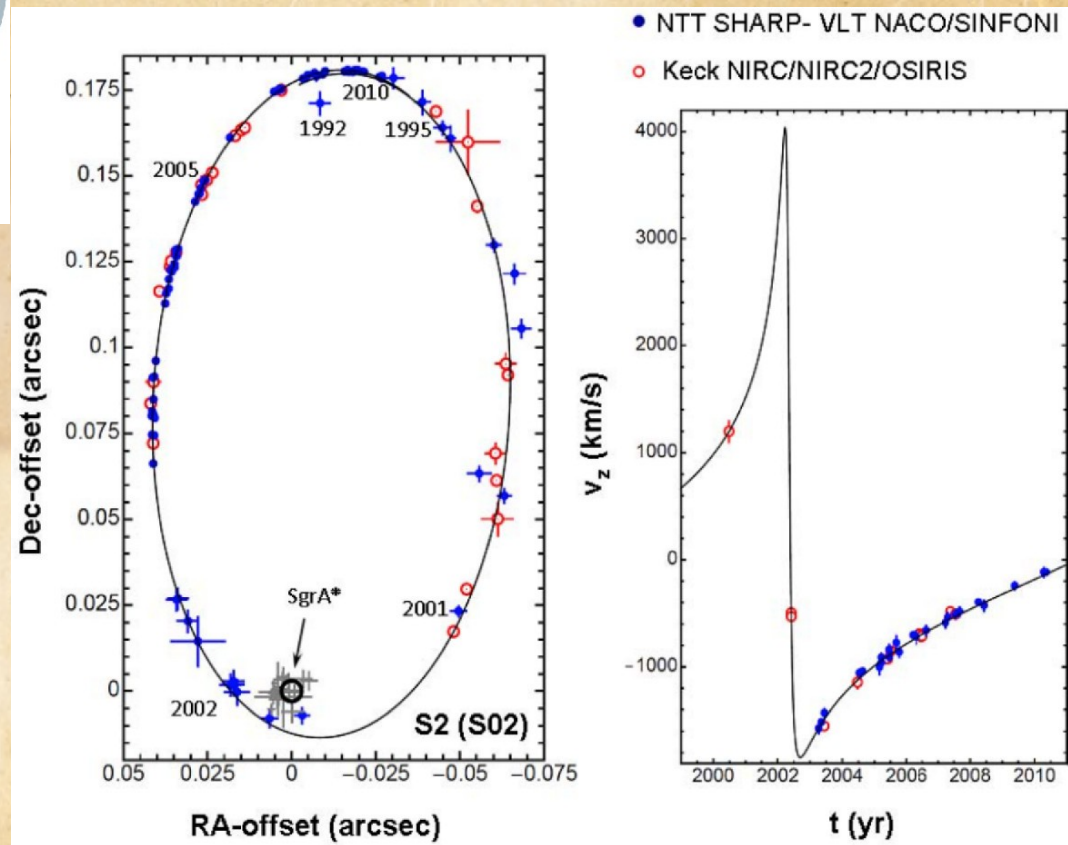
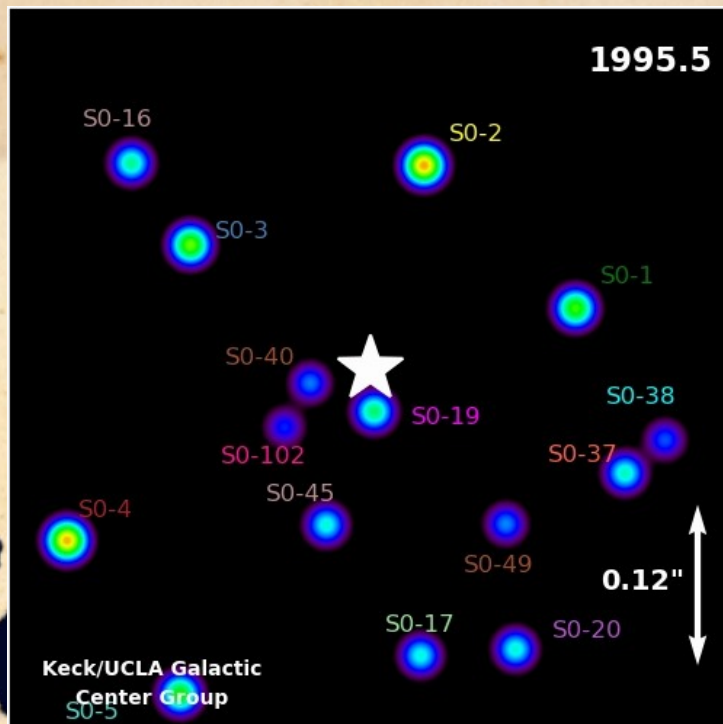
Nils Wittenburg¹ , Pavel Kroupa^{1,2} , and Benoit Famaey³ 

Посматране орбите звезда око Sgr A*



Две групе су вршиле мониторинг:

- Р. Гензел (ESO): *New Technology Telescope* и *Very Large Telescope*, Чиле
- А. Гез: *Телескоп Кек*, Хаваји, САД



- Sgr A* је супермасивна црна рупа масе $\approx 4 \times 10^6 M_{\odot}$
- Нобелова награда за физику за 2020.

Примери наших истраживања I

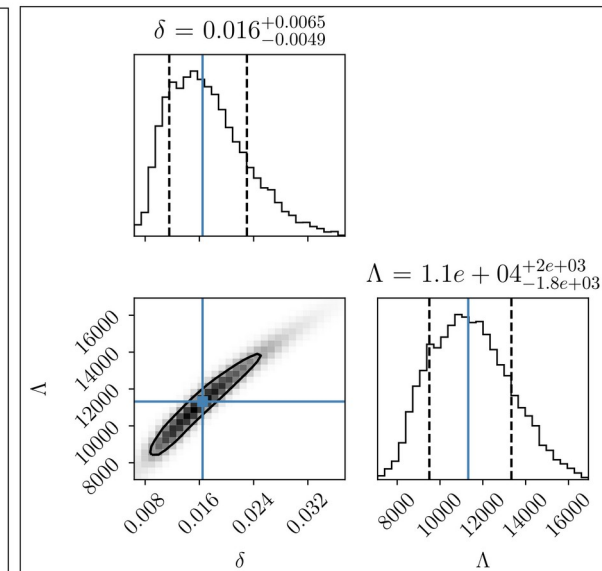
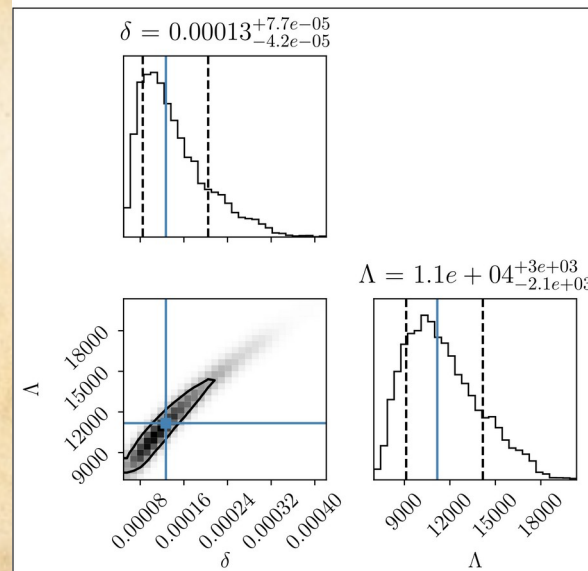
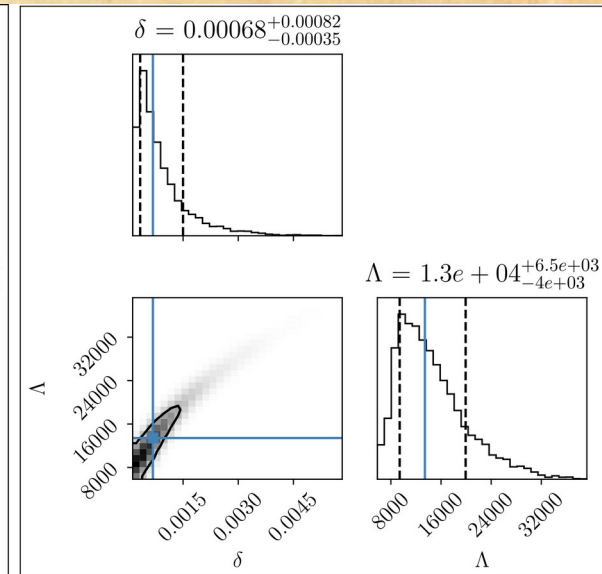
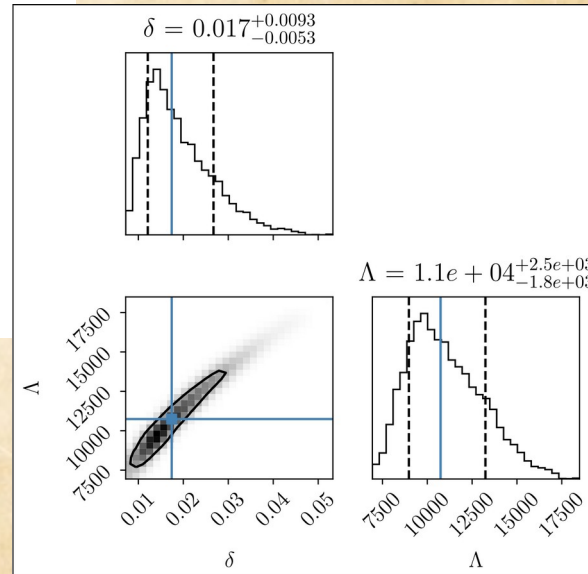
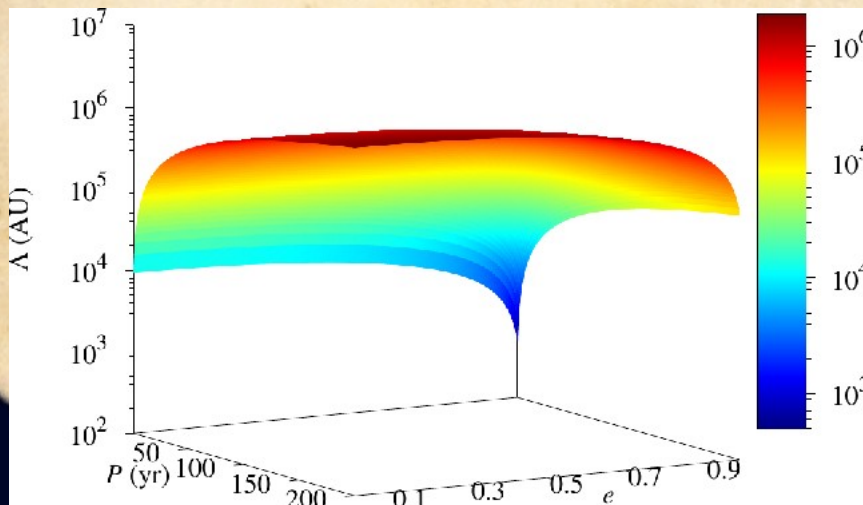
Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

JCAP03 (2023) 056

Constraints on Yukawa gravity parameters from observations of bright stars

P. Jovanović,^{a,*} V. Borka Jovanović,^b D. Borka^b
and A.F. Zakharov^c

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{(1+\delta)r} \left(1 + \delta e^{-\frac{r}{\Lambda}} \right)$$



Примери наших истраживања II

- Објашњење равних ротационих кривих спиралних галаксија у оквиру теорије нелинеарних таласа, у случају када централни овал галаксије и њен диск не садрже било коју другу материју осим барионске
- Уместо модела експоненцијалног диска за површинску густину, она се добија као решење нелинеарне Шредингерове једначине

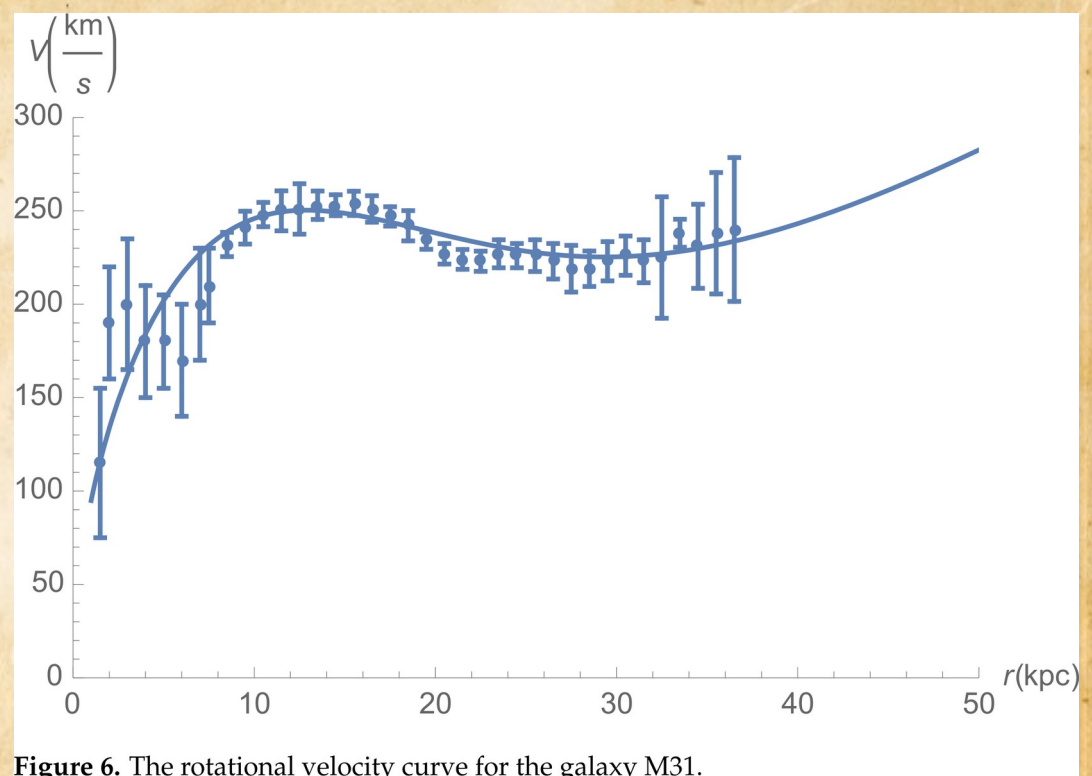
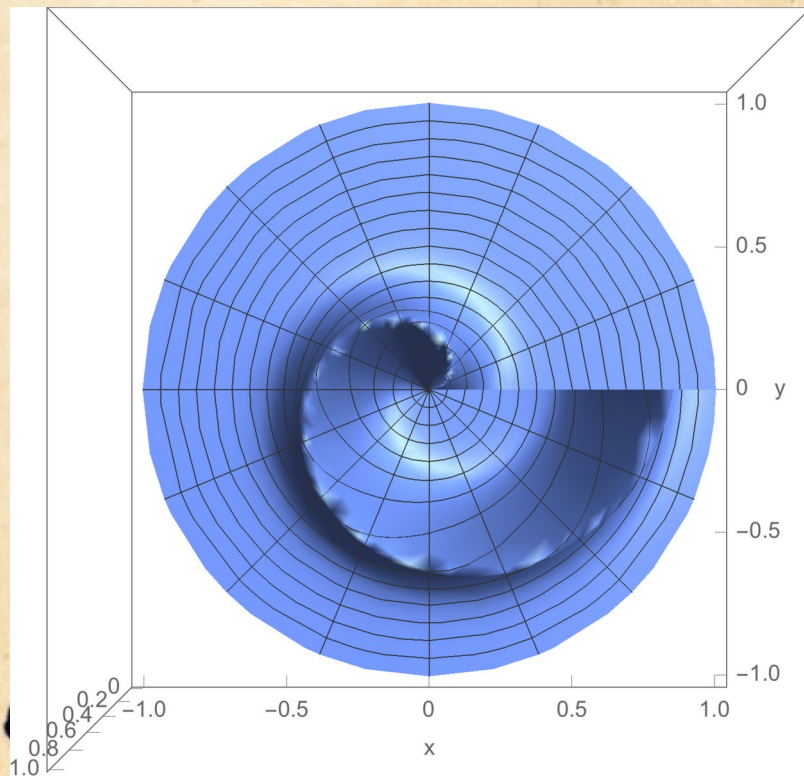


Figure 6. The rotational velocity curve for the galaxy M31.

Остварени резултати

Главни остварени резултати истраживања у периоду 2019 - 2023:

- учешће на конференцијама
- организација конференција
- наставна активност
- учешће на међународним пројектима
- међународна сарадња
- значајни цитати
- објављени радови

Учешће на конференцијама

Сарадници АОБ су учествовали на неколико домаћих и међународних стручних скупова:

(* учешће у Научним и Организационим комитетима)

- 2019: Развој астрономије код Срба X *
Europlanet Workshop - Hazards in Solar system
IV Conference on AGN and GL (2019) *
12th SCSLSA *
- 2020: 30th SPIG *
- 2021: Развој астрономије код Срба XI
Balkan Workshop 2021
2nd Conference on Nonlinearity *
III Meeting on Astrophysical Spectroscopy - A&M DATA *
- 2022: XXI Geometrical Seminar
BPU11 Congress *
31th SPIG *
- 2023: 16th Photonics Workshop
Развој астрономије код Срба XII
14th SCSLSA *
V Meeting on Astrophysical Spectroscopy - A&M DATA *

Наставна активност

П. Јовановић - предавач на предмету "Гравитација и космологија" у оквиру MASS (Master in Astrophysics and Space Science) програма заједничких мастер студија (између универзитета у Италији, Немачкој, Србији и Француској), у периоду 2022-2023

- Универзитет у Риму "Тор Вергата" (координатор)
<https://web.uniroma2.it/en>
- Универзитет у Београду, Србија (партнер)
<http://www.matf.bg.ac.rs/eng/>
- Универзитет у Бремену, Немачка (партнер)
<https://www.uni-bremen.de/en/>
- Универзитет у Ници "Азурна обала", Француска (партнер)
<https://univ-cotedazur.eu/>

Учешће на међународним пројектима

Сарадници астрономске опсерваторије су представници Србије (*Management Committee Members*) у руководећем телу следећих COST акција:

- CA15117 (**CANTATA**: Cosmology and Astrophysics Network for Theoretical Advances and Training Actions), 2016-2020
- CA15107 (**MultiComp**: Multi-Functional Nano-Carbon Composite Materials Network), 2016-2020
- CA16104 (**GWverse**: Gravitational waves, black holes and fundamental physics), 2017-2021
- CA21136 (**CosmoVerse**: Addressing observational tensions in cosmology with systematics and fundamental physics), 2022-2026

Остварена је интензивна међународна сарадња са страним колегама, што је за последицу имало вишеструку корист у погледу трансфера знања и усавршавања.

Значајни цитати

- Цитати нобеловаца (19 цитата): Сарадници П. Јовановић, Д. Борка и Б. Борка Јовановић су остварили веома значајне резултате који су примећени на светском нивоу, па су их цитирали добитници Нобелове награде за физику за 2020. годину: др Рајнхард Гензел (9 цитата) и др Андреа Гез (10 цитата)
- Резултати, објављени у раду: A. F. Zakharov, P. Jovanović, D. Borka, V. Borka Jovanović, *Constraining the range of Yukawa gravity interaction from S2 star orbits II: bounds on graviton mass*, J. Cosmol. Astropart. P. 2016, No. 05, 045-1-10 (2016), уврштени су у званичну табелу са подацима изменских и Хигсових бозона (од 2019. године) коју објављује међународна колаборација за Физику честица и космологију Particle Data Group (<https://pdg.lbl.gov/>).
(https://pdg.lbl.gov/2022/html/computer_read.html)

Објављени радови (у периоду 2019 - 2023)

i) Радови у врхунским међународним часописима - M21

- K. F. Dialektopoulos, D. Borka, S. Capozziello, V. Borka Jovanović, P. Jovanović, *Constraining non-local gravity by S2 star orbits*, **Phys. Rev. D** 99, 044053-1-10 (2019)
- V. Ganci, P. Marziani, M. D'Onofrio, A. del Olmo, E. Bon, N. Bon, C. A. Negrete, *Radio loudness along the quasar main sequence*, **Astron. Astrophys.** 630, A110-1-23 (2019)
- S. Capozziello, V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, *Constraining theories of gravity by fundamental plane of elliptical galaxies*, **Phys. Dark Universe** 29, 100573-1-9 (2020)
- N. Bon, P. Marziani, E. Bon, C. A. Negrete, D. Dultzin, A. del Olmo, M. D'Onofrio, M. L. Martinez-Aldama, *Selection of highly-accreting quasars*, **Astron. Astrophys.** 635, A151-1-26 (2020)
- M. Sniegowska, B. Czerny, E. Bon, N. Bon, *Possible mechanism for multiple changing-look phenomena in active galactic nuclei*, **Astron. Astrophys.** 641, A167-1-10 (2020)

ii)

- J.-M. Wang, E. Bon, *Changing-look active galactic nuclei: close binaries of supermassive black holes in action*, **Astron. Astrophys.** 643, L9-1-6 (2020)
- P. Marziani, M. Berton, S. Panda, E. Bon, *Optical Singly-Ionized Iron Emission in Radio-Quiet and Relativistically Jetted Active Galactic Nuclei*, **Universe** 7, 484-1-23 (2021)
- M. Vukčević, *The Spiral Galaxies Flat Rotational Velocity Curve Explained by the Constant Group Velocity of a Nonlinear Density Wave*, **Astrophys. J.** 161, 118-1-5 (2021)
- V. Borka Jovanović, D. Borka, A. Arsenić, P. Jovanović, *Spectral index distribution over radio lobes of 4C 14.11 using astrophysical data in FITS format*, **Adv. Space Res.** 71, 1227-1234 (2023)
- D. Borka, V. Borka Jovanović, S. Capozziello, P. Jovanović, *Velocity distribution of elliptical galaxies in the framework of Non-local Gravity model*, **Adv. Space Res.** 71, 1235-1244 (2023)
- P. Jovanović, V. Borka Jovanović, D. Borka, A. F. Zakharov, *Constraints on Yukawa gravity parameters from observations of bright stars*, **J. Cosmol. Astropart. P.** 2023, No. 03, 056-1-26 (2023)

iii) Радови у истакнутим међународним часописима - M22

- D. Borka, V. Borka Jovanović, S. Capozziello, A. F. Zakharov, P. Jovanović, *Estimating the Parameters of Extended Gravity Theories with the Schwarzschild Precession of S2 Star*, **Universe** 7, 407-1-18 (2021)
- D. Borka, V. Borka Jovanović, V. N. Nikolić, N. Ђ. Lazarov, P. Jovanović, *Estimating the Parameters of the Hybrid Palatini Gravity Model with the Schwarzschild Precession of S2, S38 and S55 Stars: Case of Bulk Mass Distribution*, **Universe** 8, 70-1-20 (2022)
- M. Vukčević, *The Effect of a Spiral Density Wave on the Galaxy's Rotation Curve, as Applied to the Andromeda Galaxy (M31)*, **Universe** 8, 522-1-16 (2022)
- D. Borka, V. Borka Jovanović, P. Jovanović, *Bounds on graviton mass and constraining Yukawa like gravitational potential from planetary motion in the Solar System*, **Filomat** 37, у штампи (2023)
- N. Ђ. Lazarov, V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, *Geodesic equations in the weak field limit of general $f(R)$ gravity theory*, **Filomat** 37, у штампи (2023)

iv) Радови у међународним часописима - M23

- A. F. Zakharov, P. Jovanović, D. Borka, V. Borka Jovanović, *Observational tests of general relativity and alternative theories of gravity with Galactic Center observations using current and future large observational facilities*, **Contrib. Astron. Obs. Skalnat Pleso (CAOSP)** 50, 203-218 (2020)
- P. Jovanović, V. Borka Jovanović, D. Borka, L. Č. Popović, *Possible observational signatures of supermassive black hole binaries in their Fe K α line profiles*, **CAOSP** 50, 219-234 (2020)
- D. Borka, V. Borka Jovanović, *Guiding of protons through radially deformed triple-wall carbon nanotubes*, **Eur. Phys. J. D** 75, 50-1-9 (2021)
- P. Jovanović, D. Borka, V. Borka Jovanović, A. F. Zakharov, *Influence of bulk mass distribution on orbital precession of S2 star in Yukawa gravity*, **Eur. Phys. J. D** 75, 145-1-7 (2021)
- V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, S. Capozziello, *Possible effects of hybrid gravity on stellar kinematics in elliptical galaxies*, **Eur. Phys. J. D** 75, 149-1-6 (2021)
- M. Vukčević, *Soliton structures in different astrophysical systems*, **Eur. Phys. J. D** 75, 78 (2021)

v)

- M. Vukčević, V. Zeković, M. Radeta, *Spiral structure of the galactic disk and its influence on the rotational velocity curve*, **Astron. Nachr.** 343, e210108 (2022)
- S. Panda, E. Bon, P. Marziani, N. Bon, *Taming the derivative: Diagnostics of the continuum and $H\beta$ emission in a prototypical Population B active galaxy*, **Astron. Nachr.** 343, e210091 (2022)

Рад у националном часопису међународног значаја - M24

- P. Jovanović, D. Borka, V. Borka Jovanović, *Constraining Yukawa gravity from planetary motion in the Solar System*, J. Geogr. Inst. "Jovan Cvijić" 69, 265-269 (2019)

Саопштења са међународних скупова - M33

- P. Jovanović, V. Borka Jovanović, D. Borka, A. F. Zakharov, *Graviton mass and Yukawa-like nonlinear correction to the gravitational potential: constraints from stellar orbits around the Galactic Center*, **Proceedings of the 2nd Conference on Nonlinearity**, Belgrade, Serbia, October 18-22, 2021, p.232-245 (2022)
- V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, *Flux densities and spectral indices of Relaxed Double radio galaxy 3C 84*, **PoS BPU11**, 043-1-7 (2023)

vi) Предавања по позиву са међународних скупова - M31

- V. Borka Jovanović, P. Jovanović, D. Borka, S. Capozziello, *Fundamental plane of elliptical galaxies in $f(R)$ gravity: the role of luminosity*, **Atoms** 7, 4-1-9 (2019)
- V. Borka Jovanović, P. Jovanović, D. Borka, S. Capozziello, S. Gravina, A. D'Addio, *Constraining Scalar-Tensor gravity models by S2 star orbits around the Galactic Center*, **Facta Universitatis: Series Phys. Chem. Tech.** 17, 11-20 (2019)
- E. Bon, Paola Marziani, Predrag Jovanović, N. Bon, *On the Time Scales of Optical Variability of AGN and the Shape of Their Optical Emission Line Profiles*, **Atoms** 7, 26-1-13 (2019)

Радови у врхунским часописима нац. значаја - M51

- D. Borka, V. Borka Jovanović, *Channeling of protons through radial deformed double wall carbon nanotubes*, **Atoms** 7, 88-1-14 (2019)
- S. R. Ignjatović, V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, *Hyperfine interactions of constituent quarks and the mass spectrum of tetraquark states*, **AIP Conference Proceedings** 2075, 080004-1-6 (2019)

vii) Радови у националним часописима - M53

- D. Borka, V. Borka Jovanović, *Channeling potential through radial deformed triple wall carbon nanotubes*, **Publ. Astron. Obs. Belgrade** 99, 89-92 (2020)
- V. Borka Jovanović, D. Borka, P. Jovanović, *Kinematical properties of elliptical galaxies in Yukawa-like gravity*, **Publ. Astron. Obs. Belgrade** 99, 287-290 (2020)
- A. Arsenić, D. Borka, P. Jovanović, V. Borka Jovanović, *Winged DRAGN source from Leahy's atlas: 3C 315*, **Publ. Astron. Obs. Belgrade** 102, 265-268 (2022)

Саопштења са скупова националног значаја - M63

- П. Јовановић, Л. Ч. Поповић, Н. Бон, Е. Бон, М. Сталевски, В. Борка Јовановић, Д. Борка, М. Стојановић, *Истраживања галактичких и вангалактичких гравитационих појава на Астрономској опсерваторији (2017-2019)*, Зборник радова конференције "Развој астрономије код Срба X", Београд, Србија, 22. - 26. април 2019., Публ. Астр. друш. "Руђер Бошковић" 19, 65-90 (2019)
- В. Борка Јовановић, Д. Борка, П. Јовановић, *Одређивање границе масе гравитона на основу орбите звезде S2 на Астрономској опсерваторији*, Зборник радова конференције "Развој астрономије код Срба XI", Београд, Србија, 18. - 22. април 2021., Публ. Астр. друш. "Руђер Бошковић" 22, 9-22 (2022)

Преглед радова М20 по годинама

- АОБ постиже одличне научне резултате који се огледају у квалитету публикованих радова и који су упоредиви са европским стандардима.
- Радови М20 категорије:

2019 3 рада $(2 \times M21 + 0 \times M22 + 0 \times M23 + 1 \times M24)$

2020 6 радова $(4 \times M21 + 0 \times M22 + 2 \times M23)$

2021 7 радова $(2 \times M21 + 1 \times M22 + 4 \times M23)$

2022 4 рада $(0 \times M21 + 2 \times M22 + 2 \times M23)$

2023 5 радова $(3 \times M21 + 2 \times M22 + 0 \times M23)$

$$\Sigma_M = 25 \quad (11 \times M21 + 5 \times M22 + 8 \times M23 + 1 \times M24)$$

Хвала на пажњи!